الدرس الأول حاصل الضرب الديكارتى

الزوج المرتب

يسمى (أ ، ب) زوج مرتب ويكون أ ← المسقط الأول
ب ← المسقط الثانى

الفرق بين الزوج المرتب والمجموعة

1. { أ ، ب } = { ب ، أ } ← أى أن الترتيب غير مهم فى المجموعة
2. { أ ، ب } ≠ (ب ، أ) ← ولكن مهم داخل الزوج المرتب إذا كان أ ≠ ب
3. يمكن تكرار عنصر فى الزوج المرتب ولكن لا يمكن التكرار فى المجموعة (٥،٥) ممكنة ولكن {٥،٥} غير ممكنة
4. يوجد مجموعة خالية ϕ ولكن لا يوجد زوج مرتب خالى

تساوى زوجين مرتبين

- المسقط الأول = المسقط الأول
- المسقط الثانى = المسقط الثانى

مثال (١)

(١) إذا كان (أ ، ب) = (٢ ، ٣)

الحل

فإن أ = ٢ ب = ٣

(٢) إذا كان (س ، ٥) = (٣ ، ص)

الحل

فإن س = ٣ ص = ٥

مثال (٢) أوجد قيم س ، ص فى كل مما يأتى

(١) (س + ١ ، ٥) = (٣ ، ص – ١)

الحل

س + ١ = ٣	ص – ١ = ٥
س = ٣ – ١	ص = ٥ + ١
س = ٢	ص = ٦

(١) (س + ١ ، ص^{٢}) = (٥ ، ٩)

الحل

س + ١ = ٥	ص^{٢} = ٩
س = ٥ – ١	ص = ± $\sqrt{٩}$
س = ٤	ص = ± ٣

تدريب

أوجد قيمة أ ، ب إذا كان : (١) (أ - ٢ ، ٧) = (٥ ، ب + ٣)

(٢) (ب^{٢} ، أ^{٣}) = (٤ ، ٢٧)

(٣) (٣أ ، ب^{٢} – ٥) = (٩ ، ٤)

(٣) ($\frac{أ}{٢}$ ، ب^{٢}) = (٥ ، ١)

الحل

$\frac{أ}{٢}$ = ٥

أ = ٢ X ٥

أ = ١٠

ب^{٢} = ١

بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

ب = ± ١

(٤) ($\sqrt{أ}$ ، ب^{٥}) = (٢ ، ٣٢)

الحل

$\sqrt{أ}$ = ٢

بالتربيع للطرفين

أ = ٤

ب^{٥} = ٣٢

ب^{٥} = ٢^{٥}

أو ب = $\sqrt[٥]{٣٢}$

ب = ٢

حاصل الضرب الديكارتى

تعريف

إذا كان س ، ص مجموعتان غير خاليتان فإن :

٥. س X ص = { (أ ، ب) لكل أ ∋ س، ب ∋ ص}

٦. س X س = { (أ ، ب) لكل أ، ب ∋ س}

إذا كان : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ } يكون

(١) س X ص = {(١ ، ٥) ، (١ ، ٦) ، (١ ، ٧)، (٢ ، ٥)، (٢ ، ٦)، (٢ ، ٧)}

(٢) ص X س = {(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ١)، (٦ ، ٢)، (٧ ، ١)، (٧ ، ٢)}

نلاحظ أن :

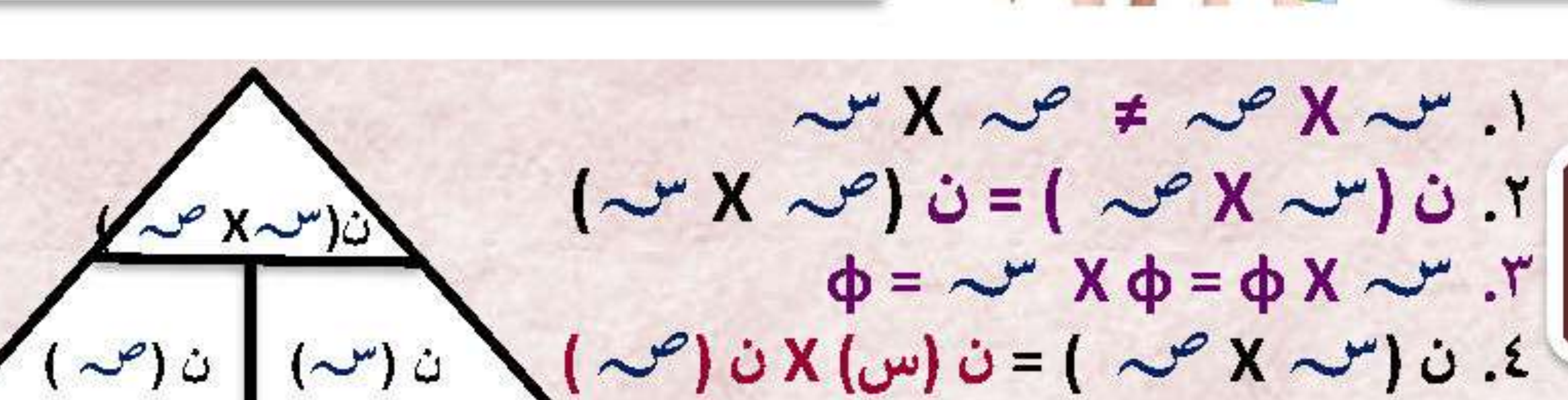
(١) س X ص ≠ ص X س

(٢) ن (س X ص) = ن (ص X س) = ٢ x ٣ = ٦ عناصر

(٣) س ^{٢} = س X س = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢)، (٢ ، ١)، (٢ ، ٢)}

لاحظ: ن (س ^{٢}) = (٢)^{٢} = ٤ عناصر

ملاحظات



الأمــثــلــة

(١) إذا كان : س~ = { ٣ ، ٢ } ، ص~ = { ١ ، ٤ } ، ع = { ٦ }

أوجد (١) س~ X ص~ (٢) ص~ X س~ (٣) س~ X ع

(٤) س~ ^٢^ (٥) ص~ ^٢^ (٦) ع^٢^

(٧) ن (س~ X ص~) ، ن (س~ ^٢^) ، ن (س~ x ع)

الحل

(١) س~ X ص~ =

(٢) ص~ X س~ =

(٣) س~ x ع =

(٤) س~ ^٢^ =

(٥) ص~ ^٢^ =

(٦) ع^٢^ =

(٧) ن (س~ x ص~) = ، ن(س~ ^٢^) = ، ن(س~ X ع) =

---

(٢) إذا كان : س~ X ص~ = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) }

أوجد (١) س~ ، ص~

(٢) وضح بمخطط سهمى س~ X ص~

(٣) وضح بمخطط بيانى س~ X ص~

(٧) وضح بمخطط سهمى س~ ^٢^

الحل

(١) س~ = { ١ ، ٤ } ، ص~ = { ٢ ، ٣ }

س~ ^٢^ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٤) (٤ ، ١) (٤ ، ٤) }

مخطط سهمى س~ X ص~ — مخطط بيانى س~ X ص~ — مخطط سهمى س~ ^٢^

تدريب

إذا كان :

ص × س = { (٥ ، ٤) ، (٥ ، ١) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٤) }

أكمل ما يأتى : -

(١) س × ص =

(٢) س =

(٣) ص =

(٤) س ^٢^ =

(٥) ن (س ^٢^) =   ن (ص ^٢^) =

(٣) هاااااام

إذا كان : س = {١}   ص = {٢ ، ٣}   ع = {٢ ، ٥ ، ٦}

أوجد : (١) (س – ص) × (ص – ع)

(٢) س × (ص ∩ ع)

(٣) (س × ص) ∩ (س × ع)

(٤) (ع - س) × (ع ∩ ص)

(٥) (س ∩ ص) × ص

الحل

(١) (س – ص) × (ص – ع) = {١} × {٣} = { (١ ، ٣) }

(٢) س × (ص ∩ ع) = {١} × {٢} = { (١ ، ٢) }

(٣) (س × ص) ∩ (س × ع) =

{ (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) } ∩ { (١ ، ٢) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ٦) } = { (١ ، ٢) }

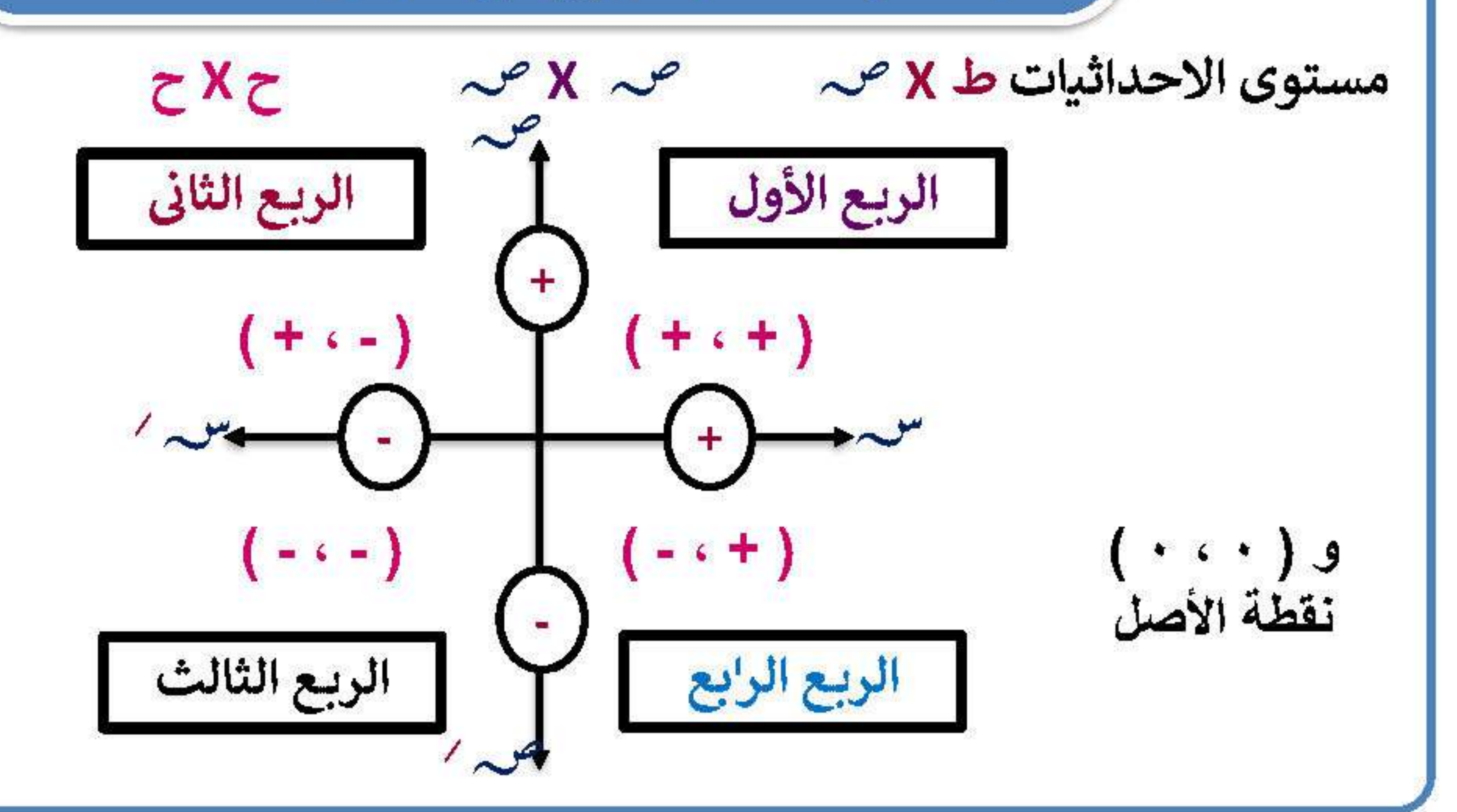
(٤) (ع - س) × (ع ∩ ص) = { ٢ ، ٥ ، ٦ } × {٢} = { (٢ ، ٢) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٢) }

(٥) (س ∩ ص) × ص = ϕ × ص = ϕ

تدريب

إذا كان : س = { ٥ ، ١ } ، ص = { ٥ } ، ع = { ١ }
أوجد : (١) (س ∩ ص) X ع
(٢) (س − ص) X س
(٣) (س − ع) X (ص ∩ ع)
(٤) (س − ص) X (ص ∪ ع)

الشبكة التربيعية المتعامدة



مثال

على شبكة تربيعية متعامدة وضح عليها النقط التالية أ (٢ ، ٣) ، ب (-١ ، ٢) ، جـ (-٣ ، -٢) ، ء (١ ، -١) ، م (٣ ، ٠) ، ك (٠ ، ١)

الحل

النقطة	الربع
أ (٢ ، ٣)	الأول
ب (-١ ، ٢)	الثانى
جـ (-٣ ، -٢)	الثالث
ء (١ ، -١)	الرابع

م (٣ ، ٠) على محور السينات
ك (٠ ، ١) على محور الصادات

ملحوظة
(س ، ٠) تقع على محور السينات
(٠ ، ص) تقع على محور الصادات

(٤) أكمل ما يأتى

(١) (٢س + ١ ، ٣ ص) = (٥ ، ٩) فإن س = ... ، ص = ...

(٢) ($س^٢$ ، $ص^٣$) = (٤ ، ٨) فإن س = ... ، ص = ...

(٣) (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فإن $\sqrt{س + ٢ ص}$ = ...

(٤) {١} X {١ ، ٥} = ...

(٥) {٢} X {٣} = ...

(٦) {١} X ϕ = ...

(٧) ن (س~ X ص~) = ٨ ، ن (س~) = ٢ فإن : ن (ص~) = ...

(٨) ن ($س~^٢$) = ٩ ، ن (ص~) = ٢ فإن : ن (س~ X ص~) = ...

(٩) ن ($س~^٢$) = ٢٥ ، ن (س~ X ص~) = ١٥ فإن : ن ($ص~^٢$) = ...

(١٠) (٣ ، ١) ∈ س~ X ص~ فإن : (١ ، ٣) ∈ ....

(١١) (٤ ، -٥) فى الربع .... (-٢ ، -١) فى الربع ....

(١٢) (٥ ، ب – ٧) تقع فى محور السينات فإن : ب = ...

(١٣) (ب + ٢ ، ٤) تقع على محور الصادات فإن : ب = ...

تمارين

(١)	أوجد قيمة س ، ص :-	(٢)	أكمل ما يأتى :-
(١)	(س ، ص – ٢) = (٧ ، ٥)	(١)	إذا كان (س + ٥ ، ٨) = (١ ، ٦ص+س) فإن : ٥س + ١ = ...
(٢)	(س^{٢} ، $\frac{١}{٢}$ ص) = (٤ ، -٢)	(٢)	إذا كان (٢س ، ٤) = (٨ ، ص + ١) فإن $\sqrt{س^{٢}+ص^{٢}}$ = ...
(٣)	(٢س ، $\sqrt{٩}$) = (٥ ، ص)	(٣)	إذا كان (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فإن : $\sqrt{س+٢ص}$ = ...
(٤)	($\frac{س}{٣}$ ، ٥) = (٩ ، $\sqrt{ص}$)	(٤)	(٥ ، -٣) تقع فى الربع .... لكن (-٣ ، ٤) تقع فى الربع ....
(٥)	(س^{٥} ، ص + ١) = (٣٢ ، $\sqrt[٣]{-٨}$)	(٥)	(س ، ٧) تقع على محور الصادات فإن : س = ...
(٦)	(٩ ، ص + ٣) = (س^{٢} ، -٤)	(٦)	(أ - ٤ ، ٨) تتبع على محور الصادات فإن : أ = ...
(٧)	(٢س ، $\frac{ص}{٢}$) = (١٠ ، ٥)	(٧)	(٣ ، ب + ٦) تقع على محور السينات فإن : ب + ٥ = ...
(٨)	(س ، س + ص)= (٥ ، ١٠)	(٨)	(س^{٢} ، ٤٥) حيث س ≠ . تقع فى الربع ....
(٩)	(س^{٣} ، ص^{٥} – ١) = (٢٧ ، ٣١)	(٩)	(-٥ ، أ) تقع فى الربع .... حيث أ<٠.
(١٠)	(س ، س + ص) = ($\frac{١}{٢}$ ، ١)	(١٠)	(أ ، ٧) تقع فى الربع .... حيث أ<٠.



(٣)	تخير الإجابة الصحيحة	(٤)	تخير الإجابة الصحيحة
(١)	إذا كان (أ - ٤ ، ٨) تقع على محور الصادات فإن أ = ... (٤ ، -٨ ، ٠ ، ١)	(١)	س~ = {١} فإن س~ ^{٢} = ... (١ ، {(١ ، ١)} ، (١ ، ١) ، {١})
(٢)	إذا كان (٥ ، ب – ٧) تقع على محور السينات فإن ب = ... (٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٢)	(٢)	س~ = {٢} ، ص~ – {٣} فإن س~ X ص~ = ... (٦ ، {٦} ، (٢ ، ٣) ، { (٢ ، ٣) })
(٣)	إذا كان (أ ، ب) تقع فى المربع الثانى فإن أ × ب .... صفر (< ، > ، = ، ≤)	(٣)	س~ = {٢} ، ن (س~ X ص~) = ٦ فإن : ن(ص~) = ... (٣ ، ٦ ، ١٢ ، {٣})
(٤)	إذا كان (س ، ص) فى المربع الثالث فإن (س^{٢} ، ص) فى الربع .... (الأول ، الثانى ، الثالث ، الرابع)	(٤)	($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$) ∈ .... (طXط ، ص~Xص~ ، حXح ، غير ذلك)
(٥)	إذا كان (س – ٤ ، ٢ – س) فى الربع الثالث فإن س = ... (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦)	(٥)	س~ = {٣} ، فإن : ن(س~ ^{٢}) = ... (٢ ، ٩ ، ١ ، { (٣ ، ٣) })
(٦)	إذا كان (س ، ص) تقع فى الربع الثالث فإن (-س ، -ص) تقع فى الربع .... (الأول ، الثانى ، الثالث ، الرابع)	(٦)	س~ = {٣} ، ن(ص~) = ٢ فإن : ن (س~ X ص~) = ... (٦ ، ٢ ، {٦} ، { (٣ ، ٢) })
(٧)	[٢،٥] X {٣} تمثل .... (قطعة مستقيمة ، شعاع ، مستقيم ، منطقة مستطيلة)	(٧)	[٢،٥] X [١،٣] تمثل .... (قطعة مستقيمة ، شعاع ، مستقيم ، منطقة مستطيلة)



(٥) إذا كانت : س = {١ ، ٢}

ص = {١ ، ٢ ، ٣}

أوجد س X ص ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى

(٦) إذا كانت : س = {٢ ، ٥} ص = {٣ ، ٦}

أوجد

(أ) س X ص ومثلها بمخطط سهمى

(ب) س ² ومثلها بمخطط سهمى

(٧) إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ١}

ص = {٣ ، ٦}

أوجد

(أ) س X ص ، ص X س

(ب) ص ² ، س ²

(ج) ن (س X ص) ، ن (ص ²)

(د) (س ∩ ص) X س

(و) (س − ص) X (ص − س)

(٨) إذا كان : س = {١ ، ٢ ، ٣}

ص = {٢ ، ٥} ، ع = {٥}

أوجد :-

(أ) (س − ص) X ع

(ب) (س ∩ ص) X ص

(ج) (س − ع) X (ص − ع)

(د) (س ∩ ع) X ص

(و) (ص ∪ ع) X (س − ص)

(٩) س X ص = {(أ ، ٥) ، (ب ، ٥) ، (أ ، ٢) ، (ب ، ٢) ، (أ ، ٣) ، (ب ، ٣)}

أوجد

س ، ص

س ∩ ص

ص ²

(١٠) <u>أكمل ما يأتى :</u>

(أ) ن (ϕ X س) = ...

(ب) س X ص = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) }

فإن : س ² = ...

(ج) ن (س X ص) = ن (س) X .....

(د) س X س = { (٥ ، ٥) }

فإن س X {٣} = ...

(هـ) ن (س X س) < ١٦

٥ ∈ س ، (١ ، ٤) ∈ س X س

فإن : س = ...

(و) س ⊂ ص

ن (س X ص) = ٦

٤ ∈ س ، (١ ، ٧) ∈ س X ص فإن

: س X ص = ...

(ز) س − ص = {٧}

ص − س = {٢ ، ٤}

س ∩ ص = {٦} فإن

(س X ص) ∩ (ص X س)

الدرس الثانى

العلاقة و الدالة

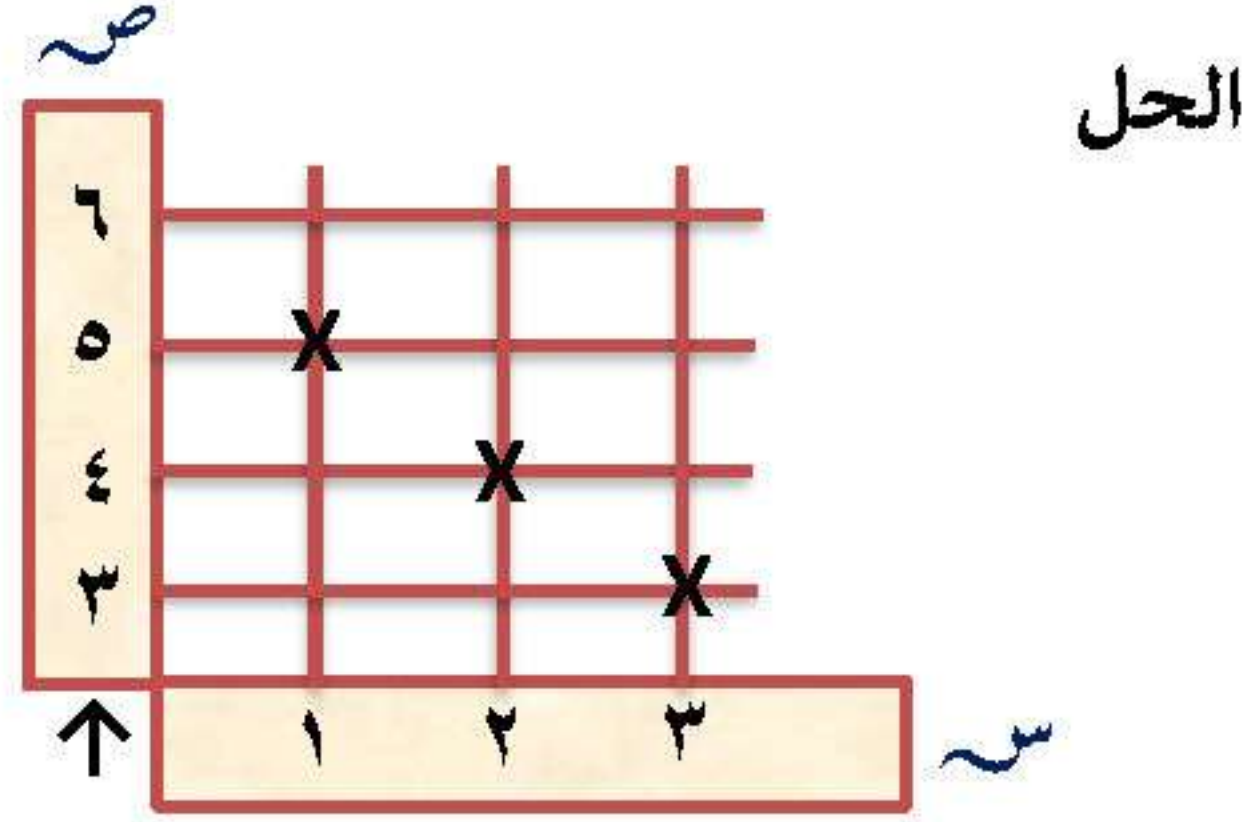
التعريف

إذا كانت س ، ص مجموعتين غير خاليتين فإن
(١) العلاقة ع : هى رابط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص
(٢) بيان العلاقة ع : مجموعة الأزواج المرتبة التى مساقطها الأولى ∋ س ومساقطها الثانية ∋ ص

مثال

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص
حيث أ ع ب تعنى ((أ + ب = ٦)) لكل أ ∋ س ، ب ∋ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وآخر بيانى

الحل



مخطط بيانى

س ص
١ ٢ ٣
٣ ٤ ٥ ٦
أ ب
أ + ب = ٦

مخطط سهمى

بيان ع = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) }

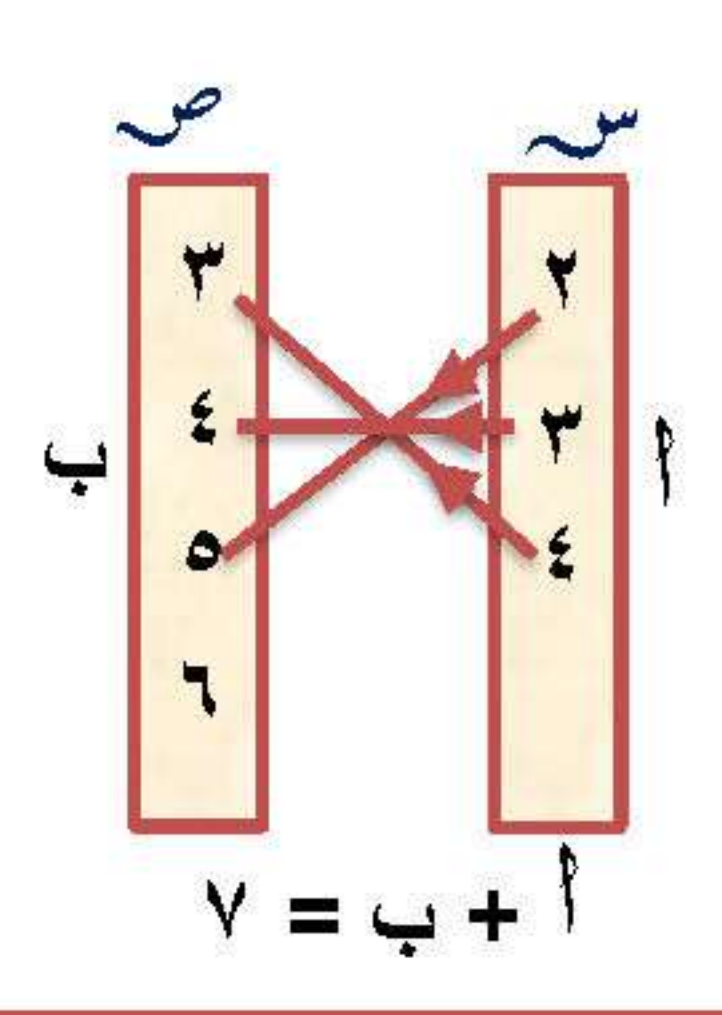
ملاحظة

العلاقة ع تصبح دالة د إذا تحقق الشروط التالية :-
(١) فى بيان ع : كل عنصر من عناصر س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط مع عناصر ص
(٢) فى المخطط السهمى : كل عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى عناصر ص
(٣) فى المخطط البيانى : كل خط رأسي يظهر عليه نقطة واحدة فقط

الأمثلة

(١) إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى ((أ + ب = ٧)) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأذكر هل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب

الحل



بيان ع = { (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) }

ع دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم وحيد إلى ص

ملاحظة

التعبير الرمزى للدالة د : س ← ص

حيث (١) المجال هو : س

(٢) المجال المقابل هو : ص

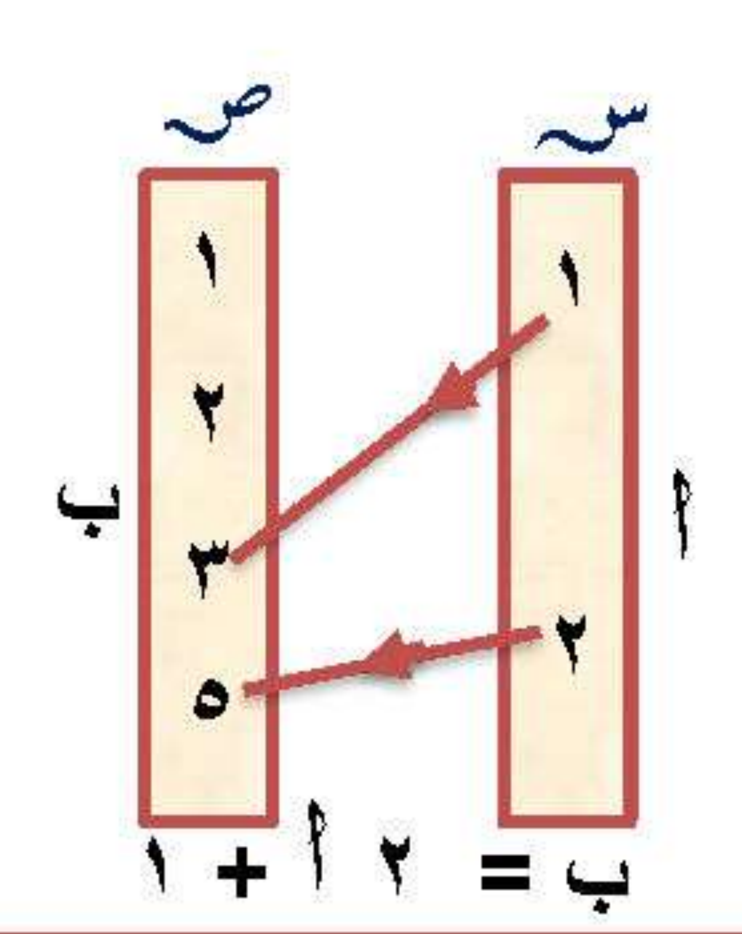
(٣) المدى هو : صور س فى ص آخر كل سهم

* المدى ⊂ المجال المقابل

* بيان ع ⊂ س X ص

(١) إذا كانت س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى ((ب = ٢ أ + ١)) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى و هل ع دالة أم ؟ موضحاً السبب وأذكر المدى

الحل



بيان ع = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) }

ع دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم وحيد إلى ص

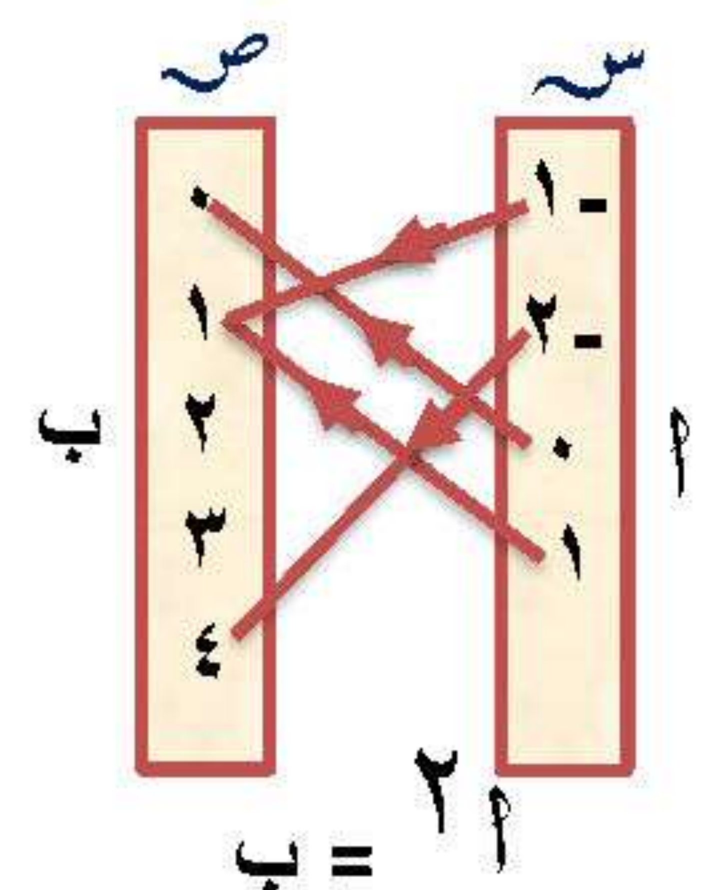
المدى = { ٣ ، ٥ }

تدريب

سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع علاقة من سـ ← صـ
تعنى ((أ = ٢ب)) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وهل
ع دالة أم لا مع ذكر السبب وان كانت دالة عين مداها

(٣) إذا كانت سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ } ، صـ = { ص : ص ، ∈ط ، ٠ ≥ ص < ٥ } وكانت ع
علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعنى (($أ^٢$ = ب)) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ أكتب
بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وأذكر هل ع دالة أم لا ؟ موضحاً المدى إذا كانت دالة

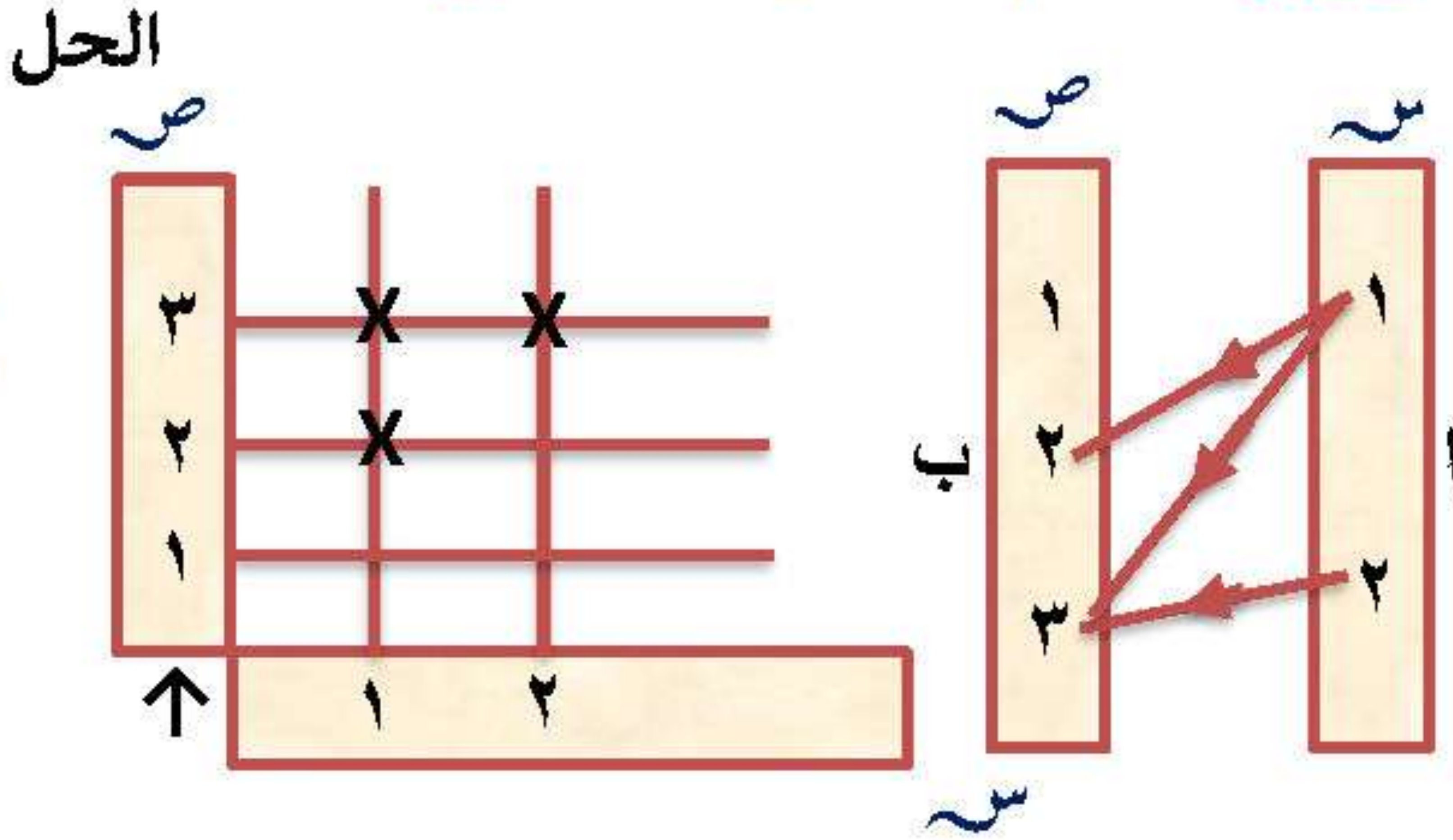
الحل



بيان ع = { (-١ ، ١) ، (-٢ ، ٤) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ٤) }
ع دالة لأن كل عنصر من سـ خرج منه سهم وحيد إلى صـ
المدى = { ٠ ، ١ ، ٤ }

(٣) إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث
أ ع ب تعنى ((أ < ب)) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ أكتب بيان ع ومثلها بمخطط بيانى
وكل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب

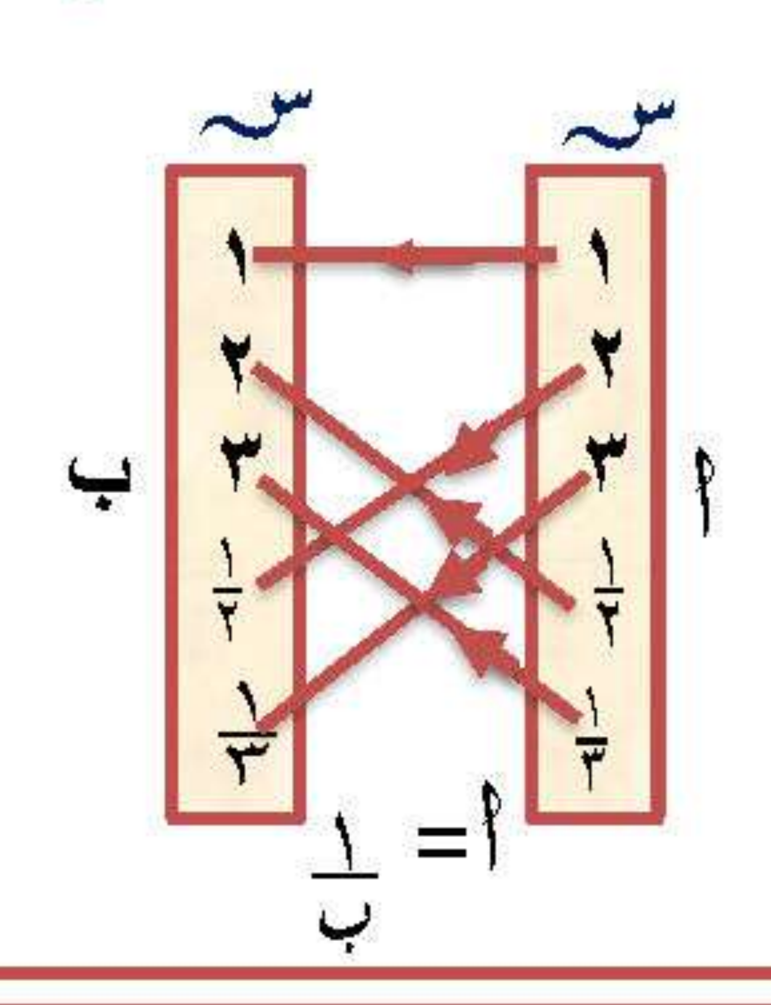
الحل



بيان ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) }
ع ليست دالة لأن بعض عناصر سـ خرج منها أكثر من سهم إلى عناصر صـ

(٥) إذا كانت س = { ١، ٢ ، ٣ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ } وكانت ع معرفة على س حيث أ ع ب تعنى أ معكوس ضربى للعدد ب لكل أ ∋ س ، ب ∋ س أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وبين مع ذكر السبب ع دالة أم لا

الحل



بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{١}{٢}$) ، (٣ ، $\frac{١}{٣}$)
، ($\frac{١}{٢}$ ، ٢) ، ($\frac{١}{٣}$ ، ٣) }

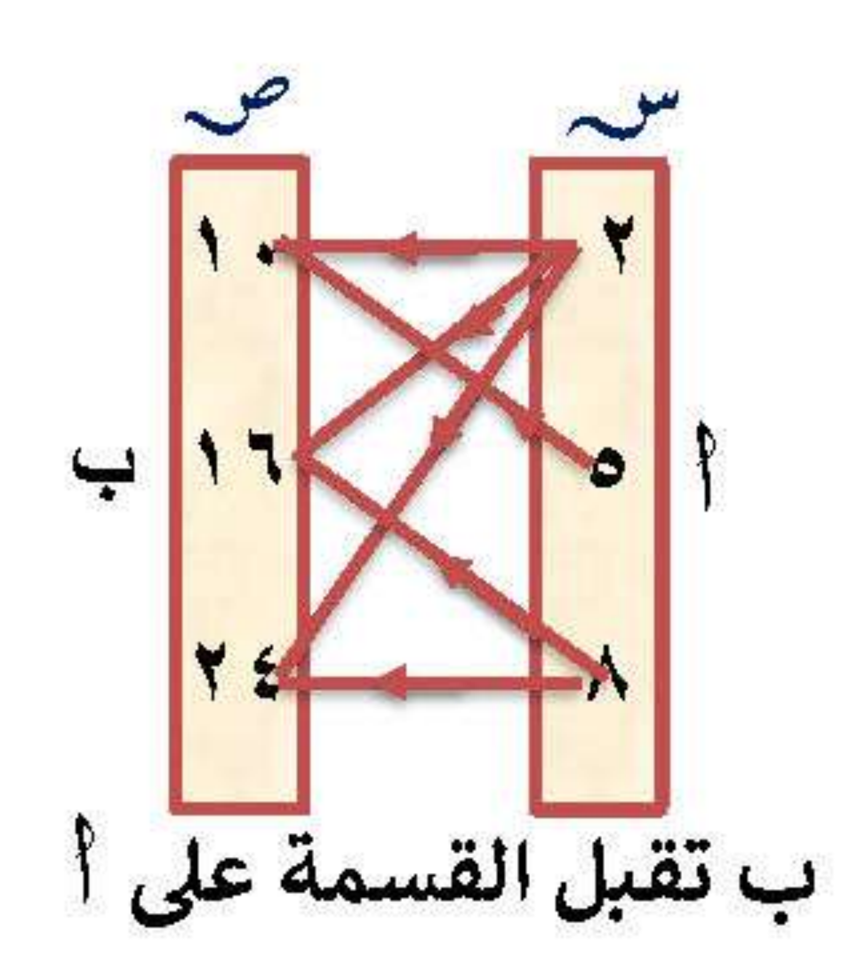
ع دالة لأن كل عنصر من س خرج منه سهم وحيد إلى س

المدى = س

(٦) إذا كانت س = { ٢، ٥ ، ٨ } ، ص = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ } وكانت ع علاقة من س إلى ص تعنى أ عامل من عوامل ب أ ∋ س ، ب ∋ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وهل ع دالة أم لا

الحل

أ عامل من عوامل ب تعنى أن ب تقبل القسمة على العدد أ



ب تقبل القسمة على أ

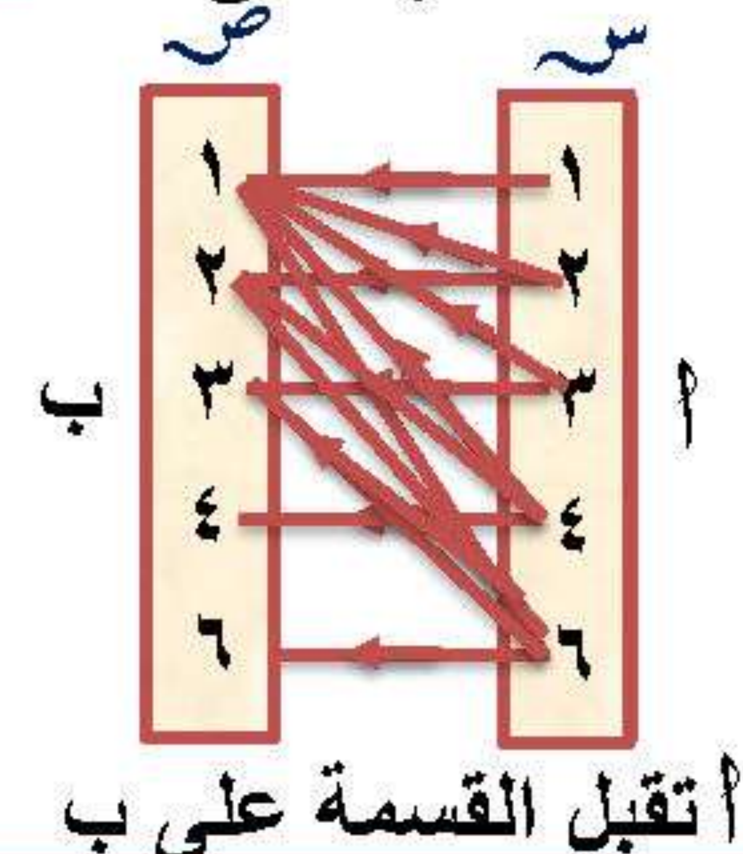
بيان ع = { (٢ ، ١٠) ، (٢ ، ١٦) ،
(٢ ، ٢٤) ، (٥ ، ١٠) ، (٨ ، ١٦) ،
(٨ ، ٢٤) }

ع ليست دالة لأن بعض عناصر س خرج منها أكثر من سهم

(٦) إذا كانت س = { ٢، ٣، ٤، ٦ } ، ص = { ١، ٢، ٣، ٤، ٦ } وكانت ع علاقة من س إلى ص تعنى أ عامل من عوامل ب أ ∋ س ، ب ∋ ص أكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمى وهل ع دالة أم لا

الحل

أ مضاعفاً للعدد ب تعني أن أتقبل القسمة على العدد ب



أ تقبل القسمة على ب

بيان ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٦) }

ع ليست دالة لأن بعض عناصر س خرج منها أكثر من سهم

ملاحظات هامة

(١) أ عامل من عوامل ب تعنى ب تقبل القسمة على أ

(٢) أ تقسم العدد ب تعنى ب تقبل القسمة على أ

(٣) أ مضاعفاً للعدد ب تعنى أ تقبل القسمة على ب

(٤) أ ضعف العدد ب تعنى أ = ٢ ب

(٥) العدد الأولى : هو العدد الذى له عاملان مختلفان نفسه والواحد الصحيح ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ....

(٦) الصفر عدد زوجي وليس له معكوس ضربى وله معكوس جمعى



تمارين

(١)	إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {٤ ، ٥ ، ٦} ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني (أ + ب = ٧) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا. موضحاً السبب
(٢)	إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني (أ = $\frac{١}{٢}$ ب) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وأذكر هل ع دالة أم لا موضحاً المدى
(٣)	إذا كانت سـ = {س:س ∈ ط ، ١ ≤ س < ٦} وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعني (أ + ب = ٦) لكل أ،ب ∈ سـ ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا. وإذا كان ٦ ع ب فاوجد ب
(٤)	إذا كانت سـ = {٠ ، ٤ ، ١٦} ، صـ = {٠ ، ٢ ، ٤} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني (ب = √أ) أكتب بيان ع وقبلها بمخطط بياني وهل ع دالة أم ؟
(٥)	إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣} ، صـ = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٧} وكانت ع علاقة من سـ إلى صـ حيث أ ع ب تعني (ب = أ٢ – ١) لكل أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب
(٦)	إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكانت ع علاقة معرفة على سـ حيث أ ع ب تعني (أ مضاعفاً للعدد ب) لكل أ،ب ∈ سـ ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط بياني ثم أذكر هل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب

(٧)	إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٥} وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني (أ تقسم ب) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ؟ موضحاً السبب
(٨)	إذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعني (أ + ب = عدد يقبل القسمة على ٣) لكل أ،ب ∈ س ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ؟ وأذكر المدى إذا كانت دالة
(٩)	إذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٢} وكانت ع علاقة معرفة على س حيث أ ع ب تعني (أ + ب = عدد زوجي) لكل أ،ب ∈ س ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ؟
(١٠)	إذا كانت س = {س:س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٣ } وكانت ع علاقة معرفة على س أ ع ب تعني (أ + ب = عدد أولي) لكل أ،ب ∈ س ، أكتب بيان ع وقبلها بمخطط سهمي وهل ع دالة أم لا ؟
(١١)	إذا كانت س = {-٢ ، ٢ ، ٥} ، ص = { ٣ ، ٧ ، ك} وكانت ع دالة من س إلى ص حيث أ ع ب تعني (ب = أ^{٢} − ١) لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص ، ١- أوجد قيمة ك ٢- مثل ع بمخطط سهمي وآخر بياني

دوال كثيرات الحدود

تعريف

الدوال كثيرات الحدود
هي الدوال التي تتكون من حد أو أكثر ويكون أسس المتغيرات عدد طبيعي ويكون مجالها ح ومجالها المقابل ح

تعريف

درجة الدالة
هي أكبر درجة للحدود في قاعدة الدالة

مثال ١

	الدالة	درجتها
١	د(س) = ٣س^{٢} + ٥س + ٢	الثانية
٢	د(س) = ٣س^{٥} + ٤س + ١	الخامسة
٣	د(س) = (س − ٢)^{٣}	الثالثة
٤	د(س) = س(س − ٢)	الثانية
٥	د(س) = ٢س + ١	الأولى
٦	د(س) = ٧	الصفرية
٧	د(س) = صفر	ليس لها درجة

مثال ٢

حدد أي الدوال التالية كثيرة حدود وإذا كانت كثير حدود حدد درجة الدالة

١- د(س) = ٥س^{٢} + س − ١

٢- د(س) = ٢ − س^{٥} + ٤س

٣- د(س) = س^{٢} + ٧

٤- د(س) = س $\left(\frac{١}{س} + ٤\right)$

٥- د(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ + ٢س + ٥

٦- د(س) = $\sqrt{س}$ + ٣س

٧- د(س) = $\frac{١}{٢}$س + ٤

الحل

١- كثيرة حدود ← من الدرجة الثانية (تربيعية)
٢- كثيرة حدود ← من الدرجة الخامسة
٣- كثيرة حدود ← من الدرجة الثانية
٤- ليست كثيرة حدود ← ليس لها درجة
٥- ليست كثيرة حدود ← ليس لها درجة ٤
٦- ليست كثيرة حدود ← ليس لها درجة
٧- كثيرة حدود ← من الدرجة الأولى (خطية)

مثال ٣

إذا كان : د(س) = $س^٢$ + ٣ أوجد
١- د(٢) ، د(-١) ، د($\sqrt{٣}$)
٢- إذا كان : د : ٣ ← أ فأوجد قيمة أ

الحل

١- د(س) = $س^٢$ + ٣
د(٢) = $(٢)^٢$ + ٣ = ٤ + ٣ = ٧
د(-١) = $(-١)^٢$ +٣ = ٣+١ = ٤
د($\sqrt{٣}$) = $(\sqrt{٣})^٢$ + ٣ = ٣+٣ = ٦
٢- ∵ د : ٣ ← أ
أ = د(٣) = $(٣)^٢$ + ٣ = ٣+٩ = ١٢

مثال ٤

تدريب

د(س) = $س^٢$ + ٢س – ٣ فإن :-
١- د(١) =
٢- د(-٢) =
٣- د(٠) =
٤- د(٥) =



التمثيل البياني للدوال

الدالة الخطية

د (س) = أس + ب

أ ∈ ع * أو أ ≠ صفر

تمثل بيانيا بخط مستقيم
- مائل بشرط أ ≠ ٠
- يقطع محور السينات بشرط ب = ٠ ويمر بنقطة الاصل (٠ ، ٠)

مثال ٣



ارسم بيانيا الدالة د(س) = ٢س – ٣ إذا كان د : ح ← ح

الحل

نفرض ثلاث قيم اختيارية لـ س ونعوض في الدالة لايجاد قيم ص

س	١	٢	٣
ص	١-	١	٣

د(١) = ٢(١) - ٣ = ١-

د(٢) = ٢ (٢) -٣ = ١

د(٣) = ٢(٣) - ٣ = ٣

تدريب

ارسم الدالة د(س) = س + ١ إذا كان د : ح ← ح

مـــثـــال ٢

مثل بيانيا الدالة د(س) = س +٣ إذا كان د : ح ← ح موضحاً نقط تقاطع المستقيم مع المحورين



الحل

نفرض ثلاث قيم اختيارية لـ س ونعوض في الدالة نوجد قيم ص

س	٠	١	٢
ص	٣	٤	٥

د(س) = س + ٣

د(٠) = ٠ + ٣ = ٣

د(١) = ١ + ٣ = ٤

د(٢) = ٢ + ٣ = ٥

* نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات (-٣ ، ٠)

نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات (٠ ، ٣)

* مساحة Δ المصنوع من تقاطع المستقيم بالمحورين

= $\frac{١}{٢} \times |-٣| \times |٣| = ٤,٥$ وحدة مربعة

مـــثـــال ٣

د(س) = ٢س + ٣

ر(س) = ٥س − ١

أوجد د(٢) + ر(−١)

الحل

د(٢) = ٢(٢) + ٣ = ٤ + ٣ = ٧

ر(−١) = ٥ (-١) -١ = -٥ − ١ = -٦

∴ د(٢) + ر(−١) = ٧ + (-٦) = ١



١	إذا كان : د(س) = ٣س + ب وكان : د(٤) = ١٣ أوجد قيمة ب	٤	إذا كان : د(س) = س − ١٠ وكان د(٣أ) = أ أوجد قيمة أ
	الحل		**الحل**
	(٤، ١٣) د(٤) = ١٣ ٣(٤) + ب = ١٣ ١٢ + ب = ١٣ ب = ١٣ − ١٢ = ١		(٣أ، أ) د(٣أ) = أ ٣أ − ١٠ = أ ٣أ − أ = ١٠ ٢أ = ١٠ أ = ٥
٢	إذا كانت د(س) = ٣س-١ يمثلها مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢)	٥	إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٦س - أ يقطب محور الصادات في النقطة (ب،٣) . أوجد قيمة أ + ب
	الحل		**الحل**
	(أ، ٢) تقع على المستقيم ∴ د(أ) = ٢ ٣ (أ) - ١ = ٢ ٣أ = ٣ ∴ أ = ١	*	∵ مستقيم الدالة يقطع محور الصادات في النقطة (ب ، ٣) ∴ ب = صفر
٣	**تدريب** إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = س + أ وكان د(-٣) = ٥ أوجد قيمة أ	*	∴ (٠، ٣) تحقق الدالة د(٠) = ٣ ٦ × ٠ - أ = ٣ − أ = ٣ أ = −٣
		*	أ + ب = -٣ + صفر أ + ب = −٣



الدالة الثابتة

صورتها

د (س) = أ

أ ∈ ح * أو أ ≠ ٠

* من الدرجة الصفرية
* ثابتة دائماً مهما تغيرت قيمة س
* تمثل بيانياً بخط مستقيم يوازي محور السينات

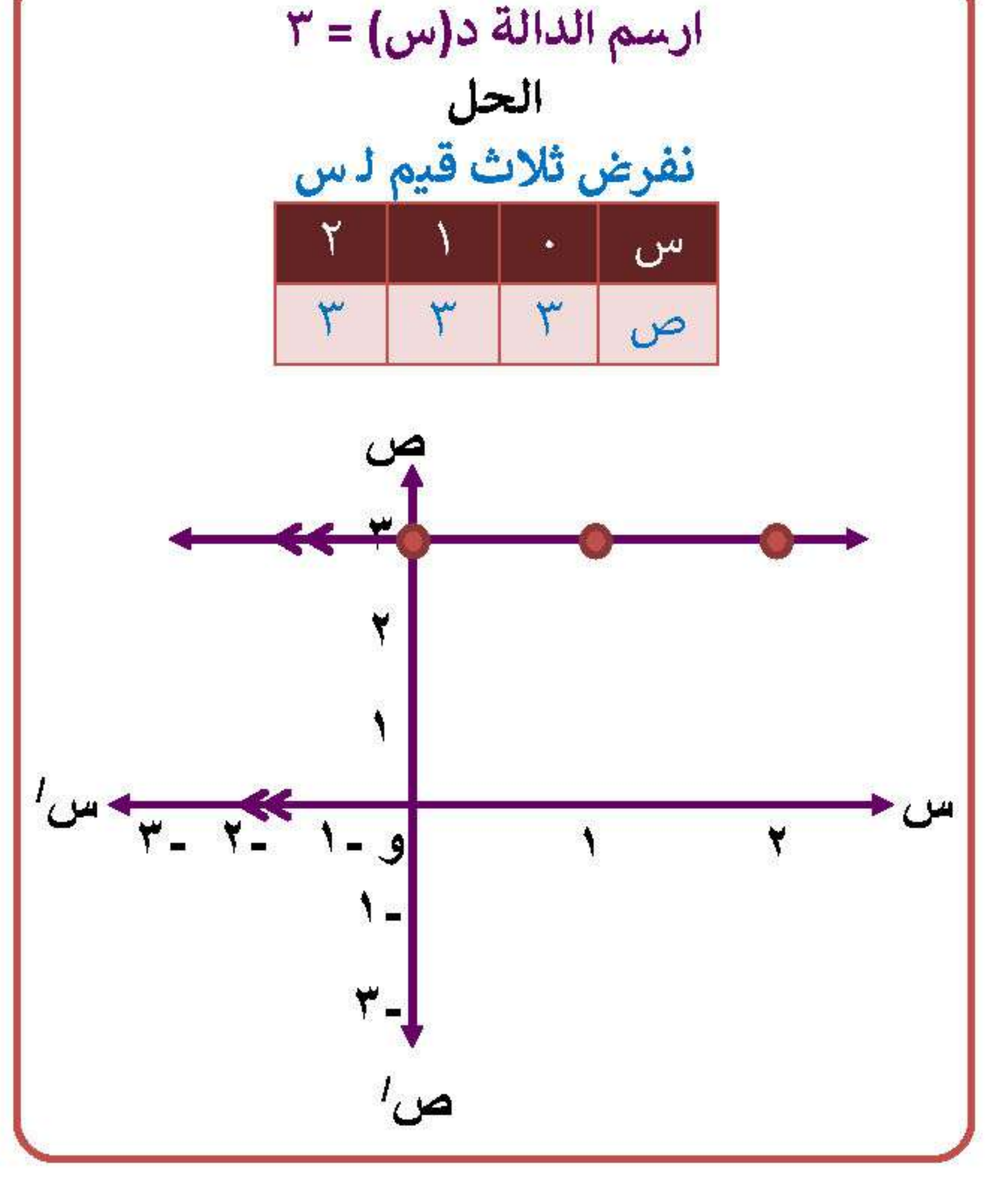
مثال ١

ارسم الدالة د(س) = ٣

الحل

نفرض ثلاث قيم لـ س

س	٠	١	٢
ص	٣	٣	٣



مثال ٢

إذا كانت د(س) = ٥

فإن

١- د(٢) =

٢- د(-٥) =

٣- د(٠) =

٤- ٣+ د(٢) =

٥- د(٧) - ٤ =

٦- د(٤) – د(٥) =

٧- ٦د(٢) =

٨- د(٨) ÷ د(٤) =

٩- د(٨) ÷ ٤ =



تمـــــاريـــــن

(١)	أكمل إذا كان :	(٢)	إذا كان : (أ، ٨أ) ∋ بيان الدالة د(س) = ٣س – ٥ فإن : أ = ...
١	د(س) = ٥س – ١ د(٥) = ... تكون (٥ ، ...) ∋ د	(٣)	د : ح ← ح حيث د(س) = ٤س - ٥ وكان (أ ، ٣) تقع على المستقيم الممثل للدالة . أوجد قيمة أ
٢	د(س) = $\frac{١}{٢}$س + ٢ د(٤) = ... تكون (٤ ، ...) ∋ د	(٤)	د(س) = ٥س - أ وكان د(٣) = ٩ أوجد قيمة أ
٣	د(س) = ٢س + ب وكان د(١) = ٥ فإن : ب = ...	(٥)	د(س) = س^{٢} + أ وكان د(٣) = ٨ أوجد قيمة أ
٤	د(س) = ٤س + ب (٣ ، ١٥) ∋ د فإن : ب = ...	(٦)	د : ح ← ح حيث د(س) = ٦س + أ تقطع محور الصادات (ب ، ٥) أوجد قيمة : ٢أ + ٧ب
٥	د(س) = ٢س + ٥ ر(س) = ٧ فإن د(٢) + ر(٦) = ...	(٧)	د(س) = ٧ د(٥) = ... ، د(٢) = ... د(-٧) + د(٧) = ...
٦	(أ، ٣) ∋ لمستقيم الدالة د(س) = ٤س-٥ فإن أ = ...	(٨)	ارسم (١) د(س) = ٢س + ١ (٢) د(س) = ٤ – س

الدرس الرابع

الدالة التربيعية

صورتها العامة

د(س) = $أس^2 + ب س + ج$ أ ≠ ٠

* دالة من الدرجة الثانية
* تمثل بمنحنى مفتوح لأعلي ∪ أ > ٠
ومفتوح لأسفل ∩ أ < ٠
* احداثي نقطة رأس المنحنى $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، د\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

مثال

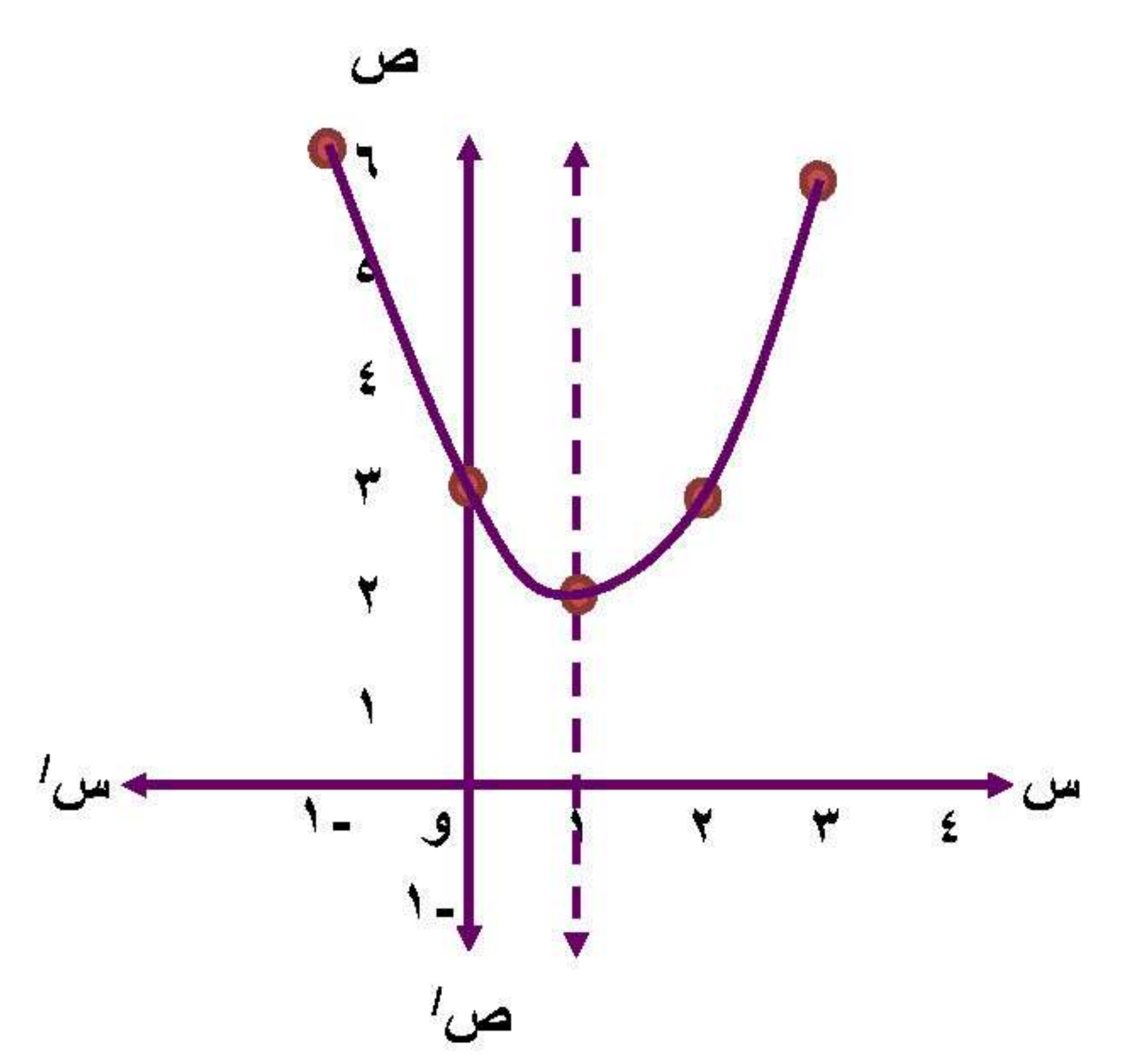
ارسم الدوال التالية واستنتج ١- نقطة رأس المنحنى
٢- القيمة العظمى او الصغري للدالة   ٣- معادلة محور تماثل الدالة

(١)

د(س) = $س^2$ – ٢س – ٣
حيث س ∈ [-١ ، ٣]

الحل

س	$س^2$ – ٢س – ٣	ص
-١	$(-١)^2$ – ٢(-١) – ٣	٦
٠	$(٠)^2$ – ٢(٠) – ٣	٣
١	$(١)^2$ – ٢(١) – ٣	٢
٢	$(٢)^2$ – ٢(٢) – ٣	٣
٣	$(٣)^2$ – ٢(٣) – ٣	٦



١- نقطة رأس المنحنى (١ ، ٢)
٢- القيمة الصغرى للدالة ص = ٢
٣- معادلة محور التماثل س = ١

(٢)

د(س) = س^{٢} – ١

متخذاً س ∋ [-٢ ، ٢]

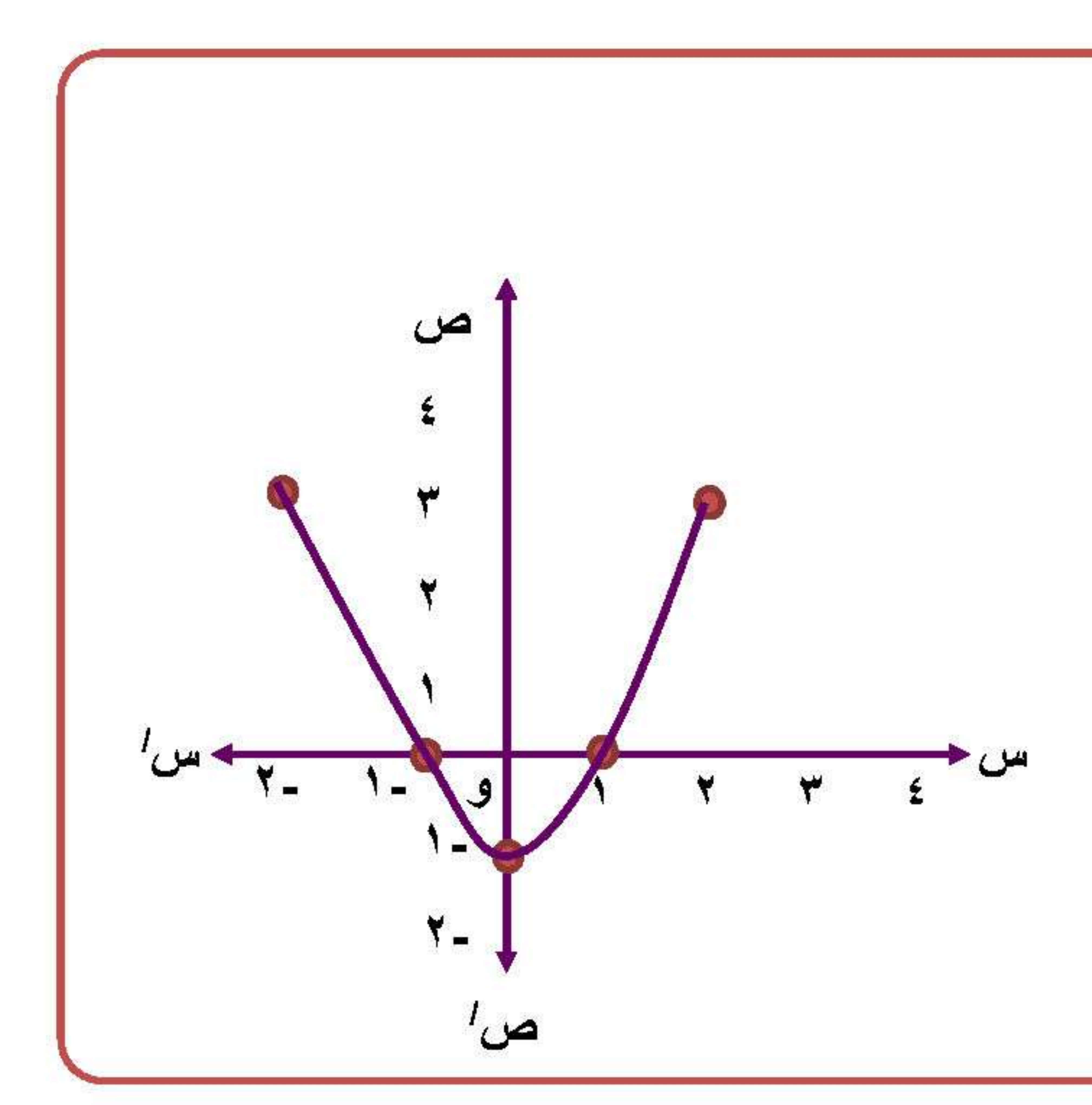
الحل

س	س^{٢} – ١	ص
-٢	(-٢)^{٢} – ١	٣
-١	(-١)^{٢} – ١	٠
٠	(٠)^{٢} – ١	-١
١	(١)^{٢} – ١	٠
٢	(٢)^{٢} – ١	٣

١- نقطة رأس المنحنى (٠ ، -١)

٢- القيمة الصغرى ص = -١

٣- معادلة خد التماثل س = ٠



(٣)

د(س) = ٢س – س^{٢}

متخذاً س ∋ [-١ ، ٣]

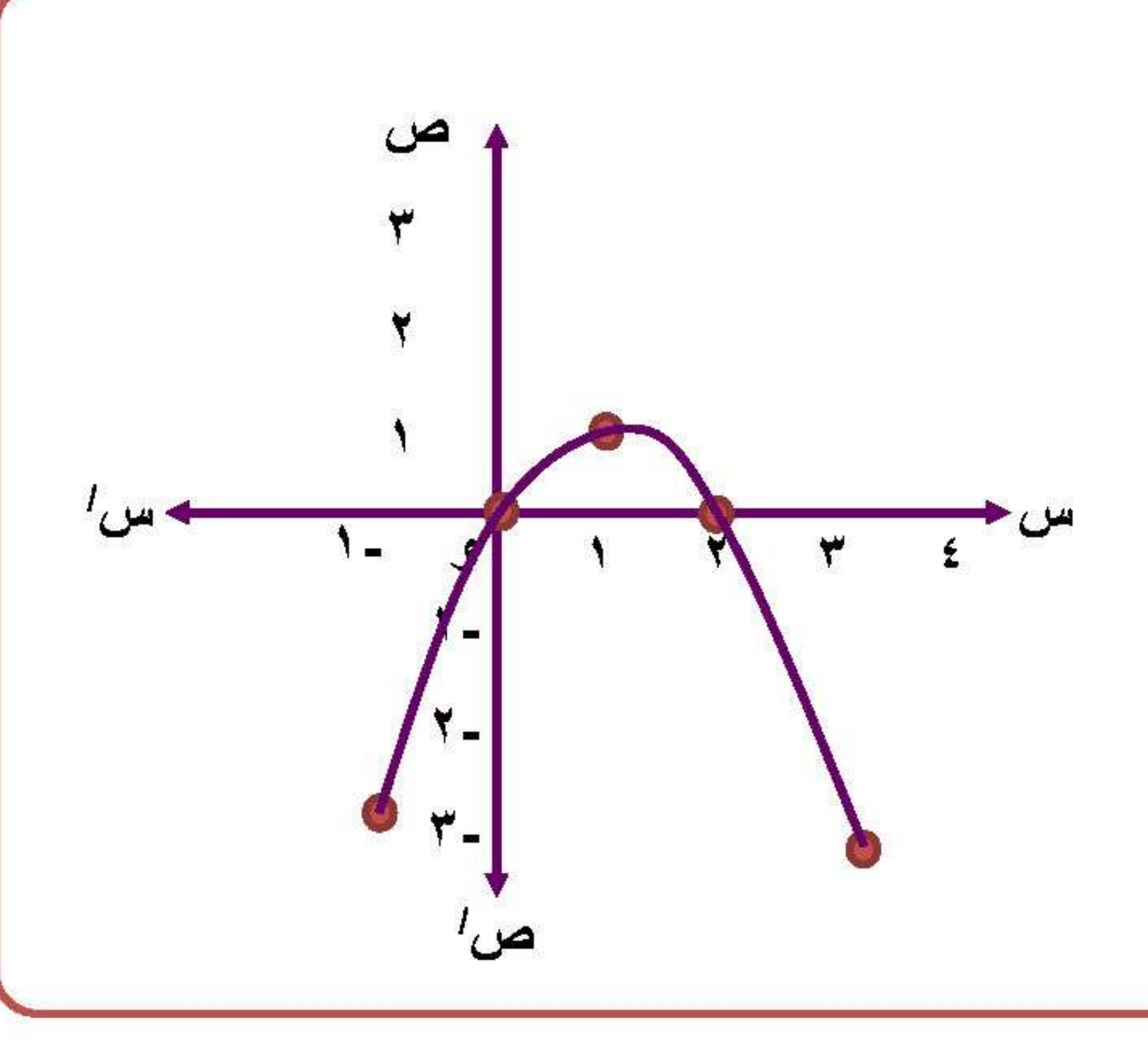
الحل

س	٢س - س^{٢}	ص
-١	٢ (-١) – (-١) ^{٢}	-٣
٠	٢(٠) – (٠) ^{٢}	٠
١	٢(١) – (١) ^{٢}	١
٢	٢(٢) – (٢)^{٢}	٠
٣	٣(٣) – (٣)^{٢}	-٣

١- نقطة رأس المنحنى (١ ، ١)

٢- القيمة العظمى ص = ١

٣- معادلة محور التماثل س = ١



(٤)

د(س) = س^{٢} + ٢س^{٢}

متخذاً س ∋ [-٣ ، ١]

الحل

س	س^{٢} + ٢س	ص

*
*
*

ص
٤
٣
٢
١
س ٢ ١ و -١ -٢ -٣ س/
-١
-٢
ص/

(٥)

د(س) = ٢ – س^{٢}

متخذاً س ∋ [-٢ ، ٢]

الحل

س	٢ - س^{٢}	ص

*
*
*

ص
٣
٢
١
س ٢ ١ و -١ -٢ س/
-١
-٢
-٣
ص/

(٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة

د(س) = س^٢ + ك

وكان أو = ٩ وحدات

أوجد

١- قيمة ك

٢- احداثي ب،جـ

٣- مساحة Δ الذي رؤوسه أ،ب،جـ

الحل

* ∵ أ تقع على محور الصادات ∴ الاحداثي الستيني = ٠ ، أو = ٩ وحدات

∴ أ(٠،−٩) تحقق معادلة المنحنى (نعوض)

−٩ = (٠)^٢ + ك ← ك = −٩

د(س) = س^٢ − ٩

* ب،جـ تقع على محور السينات ∴ ص = ٠

س^٢ − ٩ = ٠ ⇐ س^٢ = ٩ ⇐ س = ±٣

* مساحة Δ أ ب جـ = ١/٢ × ٦ × ٩ = ٢٧ وحدة مربعة

تمارين

ارسم منحنى الدوال التالية واستنتج نقطة رأس المنحنى – القيمة العظمى أو الصغرى ومعادلة محور التماثل

١- د(س) = س^٢ + ٢س − ٣ ← متخذاً س ∋ [-٤ ، ٢]

٢- د(س) = س^٢ − ٢س ← متخذاً س ∋ [-١ ، ٣]

٣- د(س) = س^٢ + ١ ← متخذاً س ∋ [-٢ ، ٢]

٤- د(س) = (س − ١)^٢ ← متخذاً س ∋ [-٣ ، ١]

٥- د(س) = ٤ - س^٢ ← متخذاً س ∋ [-٣ ، ٣]

٦- د(س) = ٤ - س^٢ ← متخذاً س ∋ [-٢ ، ٢]

الدرس الخامس

النسبة

تعريف

هي علاقة بين كمتين أ،ب توضح مقدار احتواء احداهما على الآخر

تكتب على الصورة أ:ب أو $\frac{أ}{ب}$.

حيث يسمى أ مقدم النسبة ب تالي النسبة ، أ،ب حدي النسبة

ملاحظة

إذا كانت النسبة بين عددين هي أ:ب نفرض العدد الأول أس والعدد الثاني ب س

حيث س ≠٠ ثابت النسبة

الأمثلة

١- عددان حقيقيان النسبة بينهما تساوي ٣ : ٤ ومجموعهم ٧٠ فما العددان	٢- إذا كانت النسبة بين قياس زاوية ومتممتها يساوي ٤ : ٥ فما قياس كل من الزاويتان
الحل	الحل
نفرض العددين الأول = ٣س ، الثاني = ٤س ∴ ٣س + ٤س = ٧٠ ٧س = ٧٠ س = ١٠ ثابت النسبة ∴ العددان الأول = ٣ × ١٠ = ٣٠ الثاني = ٤ × ١٠ = ٤٠	نفرض قياس الزاويتان ٤س ، ٥ س ∴ ٤س + ٥س = ٩٠ ٩س = ٩٠ س = ١٠ ثابت النسبة ∴ قياس الزاويتان ٤٠°، ٥٠°
	تدريب
	النسبة بين قياس زاوية ومكملتها كنسبة ١ : ٥ أوجد قياس كلاً من الزاويتان ؟

٣	إذا كان (٢س + ٥) : (٣س – ٥) = ٣ : ٢ أوجد قيمة س	٥	عددان صحيحان النسبة بينهم ٢ : ٥ وإذا أضيف لكل منهما ٥ اصبخت النسبة ٣ : ٥ أوجد العددين
	الحل		الحل
	$\frac{٢س+٥}{٣س-٥} + \frac{٣}{٢}$ ضرب الطرفين = ضرب الوسطين ٣(٣س – ٥) = ٢(٢س + ٥) ٩س – ١٥ = ٤س + ١٠ ٩س – ٤س = ١٥ + ١٠ ٥س = ٢٥ س = ٥		
٤	عددان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بين العددين الناتجين ٢ : ٣ فما العددان ؟	٦	أكمل : النسبة بين
	الحل		١) ٦ جنيهات : ٣٠٠ قرش هي .... ٢) ١٠ متر : ٢٠٠ سم هي .... ٣) ٢ كجم : ٨٠٠ جم هي .... ٤) ٣ ساعات : ١٢٠ دقيقة هي .... ٥) ٣ طن : ١٥٠٠ كيلو جرام هي ....
	نفرض العددين ٤س ، ٥س $\frac{٤س-٦}{٥س-٦} + \frac{٢}{٣}$ ١٢س – ١٨ = ١٠س – ١٢ ١٢س – ١٠س = ١٨ – ١٢ ٢س = ٦ س = ٣ ∴ العدد الأول = ٤ × ٣ = ١٢ الثاني = ٥ × ٣ = ١٥		



تمارين

١	إذا كان : (٣س – ١) : (٤س + ٣) = ٢ : ٣ أوجد قيمة س
٢	إذا كان : (٢س + ٥) : (٣س – ١٠) = ٥ : ٤ أوجد قيمة س
٣	عددان صحيحان النسبة بينهما ٥ : ٤ ومجموعهم ٢٧ أوجد العددين
٤	ما العدد الذي يضاف إلى حدى النسبة ٧ : ١٢ لتصبح مساوية ٢ : ٣
٥	ما العدد الذي إذا اضيف إلى حدى النسبة ٣ : ٥ لأصبحت ٣ : ٤
٦	زويتان متكاملتان النسبة بينهما ٥ : ٤ فما قياس كل من الزويتان ؟
٧	زويتان متتامتان النسبة بينهما ٢ : ١ فما قياس كل من الزويتان ؟
٨	عددان صحيحان النسبة بينهما ٤ : ٥ وإذا جمع إلى المقدم ٤ وطرح من التالي ٥ . فإن النسبة بينهما تصبح ٦ : ٥ فما العددان ؟

الدرس السادس التناسب

تعريف

هو تساوي نسبتين او أكثر

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ فإن أ، ب، جـ، ء متناسبة

والعكس صحيح

حيث أ الأول ب الثاني ، جـ الثالث ، ء الرابع

أ، ء طرفي التناسب ، ب جـ وسطي التناسب

خواص التناسب

١	إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ $\Leftarrow$ $أ \times ء = ب \times جـ$
٢	إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ $\Leftarrow$ $أ = جـ م$ ، $ب = ء م$ م ثابت التناسب $\neq$ ٠
٣	إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ $\Leftarrow$ $\frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{ء}$ ، $\Leftarrow$ $\frac{جـ}{أ} = \frac{ء}{ب}$
٤	إذا كان : $أ \times ء = ب \times جـ$ $\Leftarrow$ $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ، $\Leftarrow$ $\frac{ء}{جـ} = \frac{ب}{أ}$ فمثلاً ٥س = ٣ص $\Leftarrow$ $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ أ، $\frac{ص}{س} = \frac{٥}{٣}$

(١) أوجد قيمة س لتحصل على كميات متناسبة

١ س ، ٧ ، ١٠ ، ٣٥

الحل

$$\frac{\text{س}}{٧}=\frac{١٠}{٣٥}$$

$$\text{س}=\frac{٧\times ١٠}{٣٥}=٢$$

٢ ٢ ، س ، ٤ ، ٦

الحل

$$\frac{٢}{\text{س}}=\frac{٤}{٦}$$

$$\text{س}=\frac{٢\times ٦}{٤}=٣$$

٣ ٨ ، ٦ ، س ، ١٢

الحل

$$\frac{٨}{٦}=\frac{\text{س}}{١٢}$$

$$\text{س}=\frac{٨\times ١٢}{٦}=١٦$$

٤ ٤ ، ١٢ ، ٦ ، س

الحل

$$\frac{٤}{٦}=\frac{٦}{\text{س}}$$

$$\text{س}=\frac{٦\times ٦}{٤}=٩$$

٥ س ، $\sqrt{٨}$ ، ٧ ، $١٤\sqrt{٢}$

الحل

$$\frac{\text{س}}{\sqrt{٨}}=\frac{٧}{١٤\sqrt{٢}}$$

$$\text{س}=\frac{٧\times\sqrt{٨}}{١٤\sqrt{٢}}=١$$

٦ أب، س، $\text{ب}^{٢}$، أ

الحل

$$\frac{\text{أب}}{\text{س}}=\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{أ}}$$

$$\text{س}=\frac{\text{أ}\times\text{أب}}{\text{ب}^{٢}}=\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}}$$

تدريبات

أوجد قيمة ص لتحصل على تناسب فيما يلي

١- ٣، ٢، ص، ١٠

٢- ٢، ٦، ١، ص

٣- ص ، ١٢ ، ٦ ، ٩

٤- أ، ب، ٥$\text{أ}^{٢}$ب، ص

٥- أ، ب، ص، ٥$\text{أ}^{٢}\text{ب}^{٣}$

(٢) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$ أوجد قيمة

١- $\frac{أ+ب}{ب-أ}$ ٢- $\frac{٣أ+٢ب}{٢ب+أ}$

الحل

نفرض أن أ=٣م ، ب=٥م

١- $\frac{أ+ب}{ب-أ} = \frac{٣م+٥م}{٥م-٣م} = \frac{٨م}{٢م} = ٨$

٢- $\frac{٣أ+٢ب}{٢ب+أ} = \frac{٣(٣م)+٢(٥م)}{٢(٥م)+(٣م)} = \frac{٩م+١٠م}{١٠م+٣م} = \frac{١٩م}{١٣م} = \frac{١٩}{١٣}$

(٣) إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢}$ أوجد قيمة

١- $\frac{س+ص}{٢س-ص}$ ٢- $\frac{س^٢+ص^٢}{س^٢-ص^٢}$

الحل

$\because \frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢}$ $\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

نفرض أن س=٣م ، ص=٢م

١- $\frac{س+ص}{٢س-ص} = \frac{٣م+٢م}{٢(٣م)-٢م} = \frac{٥م}{٤م} = \frac{٥}{٤}$

٢- $\frac{س^٢+ص^٢}{س^٢-ص^٢} = \frac{(٣م)^٢+(٢م)^٢}{(٣م)^٢-(٢م)^٢} = \frac{٩م^٢+٤م^٢}{٩م^٢-٤م^٢} = \frac{١٣م^٢}{٥م^٢} = \frac{١٣}{٥}$

(٤) إذا كان : $٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٠$ حيث س ، ص حقيقيان موجبان
أوجد

١- س : ص ٢- قيمة $\frac{س + ص}{٢س + ص}$

الحل

$٤س^٢ - ٩ص^٢ = ٠ \Leftarrow ٤س^٢ = ٩ص^٢$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين حيث س ، ص موجبين

$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$

نفرض أن $س = ٣م$ ، $ص = ٢م$

٢- $\frac{س + ص}{٢س + ص} = \frac{٣م + ٢م}{٦م + ٢م} = \frac{٥م}{٨م} = \frac{٥}{٨}$

(٥) إذا كان : $\frac{س - ٢ص}{س + ٢ص} = \frac{١}{٣}$ أوجد قيمة $\frac{س}{ص}$

الحل

من المعطى حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الطرفين

$٣(س - ٢ص) = (س + ٢ص)$

$٣س - ٦ص = س + ٢ص$

$٣س - س = ٦ص + ٢ص$

$٢س = ٨ص$

$\therefore \frac{س}{ص} = \frac{٨}{٢} = ٤$

تدريب

إذا كان : $\frac{أ + ٢ب}{٣ب} = \frac{٥}{٧}$ أوجد قيمة أ:ب

(٦) إذا كان : $\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+ء}{ء}$ أثبت أن أ،ب،جـ،ء كميات متناسبة

الحل

ضرب الطرفين = ضرب الوسطين

$ء(أ+ب) = ب(جـ+ء)$

$أء+بء = بجـ+بء$

$أ\times ء = ب\times جـ$

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ ∴ أ،ب،جـ،ء متناسبة

(٧) إذا كان : $\frac{أ-س ب}{ب} = \frac{جـ-س ء}{ء}$ أثبت أن أ،ب،جـ،ء كميات متناسبة

الحل

ضرب الطرفين = ضرب الوسطين

$أء-س ب ء = ب جـ-س ب ء$

$أ\times ء = ب\times جـ$

$\therefore \frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

∴ أ،ب،جـ،ء كميات متناسبة

تدريب

إذا كان : $\frac{س+ع}{ع} = \frac{ص+ل}{ل}$ أثبت أن س،ص،ع،ل كميات متناسبة

تمـــــــاريـــــــن

١ أكمل ما يأتي :-

أ إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٧}$

فإن : س = ... ، ص = ...

ب إذا كان : أ:ب = ٣:٥

فإن : أ = ... ، ب = ...

جـ إذا كان $٢أ = ٣ب$

فإن : ١- $\frac{أ}{ب}$ = ...

٢- $٢أ - ٣ب$ = ...

د إذا كان : $٣أ - ٧ب$ = صفر

فإن : $\frac{أ}{ب}$ = ...

$\frac{٣أ}{٧ب}$ = ...

هـ إذا كان ٢ ، ٣ ، ١٠ ، هـ كميات متناسبة

فإن هـ = ...

و إذا كان : $\frac{أ+ب}{٢} = \frac{٤ب}{٥}$

فإن : أ:ب = ...

٢ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٥}{٢}$ أوجد قيمة

١- $\frac{أ+ب}{أ-ب}$ ٢- $\frac{أ+٣ب}{٢ب+أ}$

٣- $\frac{أ^{٢}+ب^{٢}}{ب^{٢}}$ ٤- $\frac{أ^{٢}-ب^{٢}}{أب}$

٣ إذا كان : $٥أ = ٣ب$ أوجد قيمة

١- $\frac{أ+ب}{ب}$ ٢- $\frac{أ^{٢}-ب^{٢}}{أ^{٢}+ب^{٢}}$

٤ إذا كان : $\frac{س+ص}{س-ص} = \frac{٥}{٢}$ أوجد

١- $\frac{س}{ص}$ ٢- $\frac{٢س+ص}{٣س-٢ص}$

٥ إذا كان : $٩س^{٢} - ٢٥ص^{٢} = ٠$

حيث س ، ص موجبان أوجد

١- $\frac{س}{ص}$ ٢- $\frac{٢س+٧ص}{٣س-ص}$

٦ إذا كان : $\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د}$ = صفر

أوجد

١- $\frac{أ}{ب}$

٢- $\frac{٢أ+٤ب}{٢ب}$

٧ إذا كان $\frac{أ+ب}{ب} = \frac{جـ+د}{د}$ أثبت أن :

أ ، ب ، جـ ، د كميات متناسبة

الدرس السابع

قاعدة هامة (١)

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ... = م$ فإن

أ = ب م

جـ = د م

هـ = و م

الأمثلة

(١) إذا كان : $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$ أوجد قيمة $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$

الحل

نفرض أن $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥} = م$ ∴ س = ٣م ، ص = ٤م ، ع = ٥م

∴ $\frac{٢ص - ع}{٣س - ٢ص + ع}$

$= \frac{٢(٤م) - (٥م)}{٢(٣م) - ٢(٤م) + (٥م)} = \frac{٣م}{٦م} = \frac{١}{٢}$

(٢) إذا كان : $\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٣}$ أثبت أن $\frac{أ - ب + جـ}{أ + ب - جـ} = \frac{١}{٣}$

الحل

(١) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ أثبت أن $\frac{\text{أ}+٣\text{ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}+٣\text{د}}{\text{د}}$

الحل

نفرض أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ فإن $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{د م}$

الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{\text{أ}+٣\text{ب}}{\text{ب}}$	$\frac{\text{جـ}+٣\text{د}}{\text{د}}$
$= \frac{\text{ب م}+٣\text{ب}}{\text{ب}}$	$= \frac{\text{د م}+٣\text{د}}{\text{د}}$
$= \frac{\text{ب}(\text{م}+٣)}{\text{ب}}$	$= \frac{\text{د}(\text{م}+٣)}{\text{د}}$
$= \text{م}+٣ \Leftarrow ١$	$= \text{م}+٣ \Leftarrow ٢$

من ١ ، ٢ الطرفان متساويان

(٢) إذا كان : أ،ب،جـ،د متناسبة أثبت أن $\frac{\text{أ}-\text{جـ}}{\text{ب}-\text{د}} = \frac{٣\text{أ}+\text{جـ}}{٣\text{ب}+\text{د}}$

الحل

نفرض أن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{م}$ فإن $\text{أ} = \text{ب م}$ ، $\text{جـ} = \text{د م}$

الأيمن	الأيسر
$\frac{\text{أ}-\text{جـ}}{\text{ب}-\text{د}}$	$\frac{٣\text{أ}+\text{جـ}}{٣\text{ب}+\text{د}}$
$= \frac{\text{ب م}-\text{د م}}{\text{ب}-\text{د}} = \frac{\text{م}(\text{ب}-\text{د})}{(\text{ب}-\text{د})}$	$= \frac{٣\text{ب م}+\text{د م}}{٣\text{ب}+\text{د}} = \frac{\text{م}(٣\text{ب}+\text{د})}{(٣\text{ب}+\text{د})}$
$= \text{م} \Leftarrow ١$	$= \text{م} \Leftarrow ٢$

قاعدة هامة (٢)

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{هـ}{و} = ... = م$ فإن

$$م = \frac{م_١ أ + م_٢ جـ + م_٣ هـ}{م_١ ب + م_٢ د + م_٣ و}$$ (احدى النسب)

(١) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ متناسبة أثبت أن $\frac{أ+٥جـ}{ب+٥د} = \frac{٢أ+٣جـ}{٢ب+٣د}$

الحل الأول

نفرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = م$ فإن $أ = ب م$ ، $جـ = د م$

الأيمن	الأيسر
$\frac{ب م + ٥ د م}{ب + ٥د}$	$= \frac{٢ب م + ٣ د م}{٢ب + ٣د}$
$= \frac{م(ب+٥د)}{(ب+٥د)}$	$= \frac{م(٢ب+٣د)}{(٢ب+٣د)}$
$= م \Leftarrow ١$	$= م \Leftarrow ٢$

من ١ ، ٢ الطرفان متساويان

الحل الثاني

بضرب حدي النسبة الاولى × (١) والثانية × (٥) وجمع المقدمات والتوالي

$\therefore \frac{أ+٥جـ}{ب+٥د} = م$ (احدى النسب) ← ١

بضرب حدي النسبة الاولى × (١) والثانية × (٥) وجمع المقدمات والتوالي

$\therefore \frac{٢أ+٣جـ}{٢ب+٣د} = م$ (احدى النسب) ← ٢

تدريب

إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{ل}$ أثبت أن

١- $\frac{٢س + ٧ع}{٢ص + ٧ل} = \frac{س - ٢ع}{ص - ٢ل}$

٢- $\frac{س - ٢ع}{ص - ٢ل} = \frac{٣س + ع}{٣ص + ل}$

٢	أكمل ما يأتي :-
١	$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{١٥أ + ...}{..... + ٢د} = \frac{..... - ٢جـ}{٧ب - .....}$
٢	$\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د} = \frac{أ + جـ}{.....} = \frac{١٢أ + ...}{..... + ٣د}$
٣	$\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥} = \frac{أ + ب}{.....} = \frac{ب - أ}{.....}$
٤	$\frac{أ}{٤} = \frac{ب}{٣} = \frac{١٢أ + ب}{........} = \frac{أ + ٣ب}{........}$
٥	$\frac{١٢}{س} = \frac{٢}{ص} = \frac{.........}{س - ص} = \frac{.........}{س + ٢ص}$
٦	$\frac{أ}{٣} = \frac{ب}{٥} = \frac{جـ}{٢} = \frac{أ + ب + جـ}{ك}$ فإن ك = ...
٧	$\frac{أ}{٦} = \frac{ب}{٢} = \frac{جـ}{٣} = \frac{١٢أ + ب + جـ}{ك}$ فإن ك = ...
٨	$\frac{س}{٤} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٢} = \frac{س + ص + ع}{٣ك}$ فإن ك = ...

(٣) إذا كان : $\frac{س}{أ-ب+جـ} = \frac{ص}{ب-جـ+أ} = \frac{ع}{جـ-أ+ب}$ أثبت أن $\frac{س+ص}{أ} = \frac{ص+ع}{ب}$

الحل

* بجمع مقدمات وتوالي النسبين الأولى والثانية

$$\frac{س+ص}{أ-ب+جـ+ب-جـ+أ} = م$$

$$\frac{س+ص}{٢أ} = م \qquad \text{بالضرب} \times ٢$$

$$\frac{س+ص}{أ} = ٢م \quad \leftarrow ١$$

* بجمع مقدمات وتوالي النسبتين الثانية والثالثة

$$\frac{ص+ع}{ب-جـ+أ+جـ-أ+ب} = م$$

$$\frac{ص+ع}{٢ب} = م \qquad \text{بالضرب} \times ٢$$

$$\frac{ص+ع}{ب} = ٢م \quad \leftarrow ٢$$

من ١ ، ٢ ينتج أن

$$\frac{س+ص}{أ} = \frac{ص+ع}{ب}$$

(٤) إذا كان : $\frac{أ}{س+ص} = \frac{ب}{س-٤ص}$ أثبت أن $\frac{أ+ب}{٥س-٣ص} = \frac{أ-ب}{٣س+٥ص}$

الحل

* بجمع مقدمات وتوالي النسبين الأولى والثانية

$$\frac{س+ص}{٤س+ص+س-٤ص} = م$$

$$\frac{أ+ب}{٥س-٣ص} = م \quad \leftarrow ١$$

* بضرب حدي النسبة الأولى × (١) والثانية × (-١) وجمع المقدمات والتوالي

$$\frac{أ-ب}{٤س+ص-س+٤ص} = م$$

$$\frac{أ-ب}{٣س+٥ص} = م \quad \leftarrow ٢$$

من ١ ، ٢ ∴ الطرفان متساويان

تدريب

إذا كان : $\frac{أ}{٢س-ص} = \frac{ب}{٢ص-ع} = \frac{جـ}{٢ع-س}$ أثبت أن

$$\frac{أ+٢جـ}{٤ع-ص} = \frac{٢أ+ب}{٤س-ع}$$

(٤) إذا كان : $\frac{أ+ب}{٣} = \frac{ب+جـ}{٦} = \frac{جـ+أ}{٥}$ أثبت أن $\frac{أ+ب+جـ}{أ} = ٧$

الحل

فكرة الحل ← تعديل المطلوب $\frac{أ+ب+جـ}{أ} = \frac{٧}{١} \Leftarrow \frac{أ+ب+جـ}{٧} = \frac{أ}{١}$

* بجمع المقدمات والتوالي للنسب الثلاثة

$$\frac{٢أ+٢ب+٢جـ}{١٤} = م$$

$$\frac{٢(أ+ب+جـ)}{١٤} = م$$

$$\frac{أ+ب+جـ}{٧} = م \leftarrow ١$$

* بضرب حدي النسبة الثانية × (-١) وجمع مقدمات وتوالي الثلاث نسب

$$\frac{أ+ب-ب-جـ+جـ+أ}{٣-٦+٥} = م$$

$$\frac{٢أ}{٢} = م \Leftarrow أ = م \leftarrow ٢$$

من ١ ، ٢ ينتج أن $\frac{أ+ب+جـ}{٧} = \frac{أ}{١}$ $\frac{\text{المقدم}}{\text{المقدم}} = \frac{\text{التالي}}{\text{التالي}}$

$\therefore \frac{أ+ب+جـ}{أ} = ٧$

تدريب

إذا كان : $\frac{س+ص}{٥} = \frac{ص+ع}{٣} = \frac{ع+س}{٦}$ أثبت أن

$$\frac{س-ع}{٢} = \frac{س+ص+ع}{٧}$$

تمـــــاريـــــن

(١) اكمل ما يأتي			
(١)	إذا كان : $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٤}$ فإن $\frac{\text{س} - \text{ص} + ٢\text{ع}}{٢\text{ص} - \text{ع}} = \frac{....}{....}$	(هـ)	$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{٢\text{أ} + ...}{...... + ٥\text{د}}$
(٢)	إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٥} = \frac{\text{ب}}{٧} = \frac{\text{جـ}}{٣}$ فإن $\frac{\text{ب} - \text{جـ}}{\text{جـ} + \text{أ}} = \frac{....}{....}$	(و)	$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٣} = \frac{٢\text{س} + \text{ص}}{٢\text{ك}}$ فإن : ك = ...
(٣)	إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = ٢$ فإن $\frac{\text{أ} + \text{جـ}}{\text{ب} + \text{د}} = ...$	(ز)	$\frac{\text{أ}}{٧} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{جـ}}{٣} = \frac{\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}}{٣\text{س}}$ فإن : س = ...
(٤)	إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}} = ٣$ فإن (أ) $\frac{\text{أ} + \text{جـ} + \text{هـ}}{\text{ب} + \text{د} + \text{و}} = ...$	(٥)	إذا كان : $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٤}$ أثبت أن : $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص} + ٣\text{ع}} = \frac{٧}{١٧}$
(ب)	$\frac{\text{أ}}{٣} = \frac{\text{ب}}{٢} = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{......}$	(٦)	إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٣} = \frac{\text{ب}}{٥} = \frac{\text{جـ}}{٤}$ أوجد قيمة : $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٣\text{ب} + \text{جـ}}$
(جـ)	$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{٢\text{س} + \text{ص}}{......}$	(٧)	إذا كان : أ:ب:جـ = ٢ : ٥ : ٤ أثبت أن : $\frac{\text{ب} + ٢\text{جـ}}{١٣} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{٣}$

(د)	$\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{٤} = \frac{س + ص - ع}{..............}$	(٨)	إذا كان : $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٣} = \frac{جـ}{٢}$ أثبت أن : $\frac{٢أ + ب}{١٣} = \frac{٣ب - جـ}{٧}$

تمـــاريـــن على قاعدة (٢)

(١)	إذا كان
(١)	$\frac{أ}{جـ + د} = \frac{ب}{جـ - د}$ أثبت أن : $\frac{أ + ب}{جـ} = \frac{أ - ب}{د}$
(٢)	$\frac{س}{أ - ب + جـ} = \frac{ص}{ب - جـ + أ} = \frac{ع}{جـ - أ + ب}$ أثبت أن : $\frac{س + ص}{أ} = \frac{ص + ع}{ب}$
(٣)	$\frac{س}{أ + ب} = \frac{ص}{ب - أ} = \frac{ع}{أ - ب + ٢جـ}$ أثبت أن $\frac{س + ص}{ب} = \frac{س - ص}{أ} = \frac{ص + ع}{جـ}$
(٤)	$\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{أ - ٢ب}$ أثبت أن : $\frac{٢س + ص}{أ} = \frac{س - ٢ص}{ب}$
(٥)	$\frac{س}{٢أ - ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$ أثبت أن : $\frac{٢س + ص}{٤أ - جـ} = \frac{س + ٢ع}{٤جـ - ب}$
(٦)	$\frac{س}{٢أ + ب} = \frac{ص}{٢ب - جـ} = \frac{ع}{٢جـ - أ}$ أثبت أن : $\frac{٣س + ص}{٤أ + ٤ب - جـ} = \frac{٢س + ٢ص + ع}{٣أ + ٦ب}$
(٧)	$\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٨}$ أثبت أن $\frac{س + ص + ع}{س - ع} = ٥$
(٨)	$\frac{٢أ + ب}{أ} = \frac{٤ب + جـ}{ب} = \frac{٤جـ + ٣أ}{جـ}$ ١- أثبت أن : كل نسبة = ٥ ٢- أثبت أن : ب = ٣أ

الدرس الثامن

التناسب المتسلسل

تعريف

يقال للكميات أ، ب، جـ أنها في تناسب متسلسل

إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ}$

حيث يسمى

أ الأول المتناسب ب الوسط المتناسب ،

جـ الثالث المتناسب

$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} \Leftarrow ب = \pm\sqrt{أجـ}$

الوسط = $\pm \sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

$ب^2 = أجـ \Leftarrow أ = \frac{ب^2}{جـ}$ الأول = $\frac{(\text{الوسط})^2}{\text{الثالث}}$

الأمثلة $\Leftarrow جـ = \frac{ب^2}{أ}$ الثالث = $\frac{(\text{الوسط})^2}{\text{الأول}}$

(١) أوجد الوسط المتناسب (الهندسي) بين الكمتين

١- ٤ ، ٩   ٢- ٥ ، ٢   ٣- ٩س^{3}ص^5، ٤س ص^3

الحل

الوسط = $\pm \sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

١- الوسط = $\pm\sqrt{٤ \times ٩} = \pm ٦$

٢- الوسط = $\pm\sqrt{٥ \times ٢} = \pm\sqrt{١٠}$

٣- الوسط = $\pm\sqrt{٩س^3ص^5 \times ٤س ص^3}$

$\pm\sqrt{٣٦س^4ص^8} = \pm ٦س^2ص^4$

تدريب

أوجد الوسط المتناسب بين الكمتين

١- ٣ ، ٢٧   ٢- ١٨ ، ٨   ٣- ١٢أ^{4}ب، ٨١أ^{2}ب^3

(٢) أوجد الثالث المتناسب بين الكمتين

١- ١٠ ، ٥   ٢- $أ^{٤}$ ، $أ^{٥}$ ٣- $أ^{٤}$ ، $-٤أ^{٢}ب^{٢}$

الحل

$$\text{الثالث} = \frac{(\text{الوسط})^{٢}}{\text{الأول}}$$

١- الثالث = $\frac{(٥)^{٢}}{١٠} = \frac{٥}{٢}$

٢- الثالث = $\frac{(أ^{٥})^{٢}}{أ^{٤}} = \frac{أ^{١٠}}{أ^{٤}} = أ^{٦}$

٣- الثالث = $\frac{(-٤أ^{٢}ب^{٢})^{٢}}{أ^{٤}} = \frac{١٦أ^{٤}ب^{٤}}{أ^{٤}} = ١٦ب^{٤}$

(٣) أوجد الأول المتناسب للكمتين :

١- ٨ ، −٣٢   ٢- ٥ ، −٥   ٣- $٦أ^{٢}ب^{٣}$ ، $-٤أب$

الحل

$$\text{الأول} = \frac{(\text{الوسط})^{٢}}{\text{الثالث}}$$

١- الأول = $\frac{(٨)^{٢}}{-٣٢} = -٢$ ٢- الأول = $\frac{(٥)^{٢}}{-٥} = -٥$

٣- الأول = $\frac{(٦أ^{٢}ب^{٣})^{٢}}{-٤أب} = \frac{٣٦أ^{٤}ب^{٦}}{-٤أب} = -٩أ^{٣}ب^{٥}$

تدريب

أكمل لتحصل على تناسب

١- ٤ ، ..... ، ٩   ٢- .... ، ١٦ ، ٦٤

٣- أ ، ...... ، $أب^{-٢}$ ٤- ...... ، $٢أ^{٢}$ ، ٤أ

قواعد هامة جداً

١	إذا كان أ،ب،جـ كميات متناسبة $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م \Leftarrow$ ب = جـ م ، أ = جـ م^{٢}
٢	إذا كان أ،ب،جـ،د في تناسب متسلسل $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م \Leftarrow$ ∴ جـ = د م ، ب = د م^{٢} ، أ = د م^{٣}

أمثلة

(١)	أكمل ما يأتي
١	إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{٥} = ٢$ فإن : ب = ... ، أ =.......
٢	إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{٢} = ٣$ فإن : جـ = ... ، ب = ... ، أ =.......
٣	إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ فإن : $\frac{أ}{جـ}$ =.......
٤	إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{د} = م$ فإن : $\frac{أ}{د}$ =....... (م ، م^{٢} ، م^{٣} ، م^{٤})

(٢) إذا كان أ ، ب ، ج كميات متناسبة

أثبت أن : $\frac{أ - ب}{ب - ج} = \frac{أ}{ب}$

الحل :-

نفرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$ ← ب = ج م ، أ = ج م^2

الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{أ - ب}{ب - ج}$	$\frac{أ}{ب}$
تعويض $\frac{ج م^2 - ج م}{ج م - ج}$	$\frac{ج م^2}{ج م}$
مشترك $\frac{ج م(م - 1)}{ج(م - 1)}$	= م
= م ← (١) اختزال	من (١) (٢) الطرفان متساويان

(٣) إذا كان أ ، ب ، ج كميات متناسبة

أثبت أن : $\frac{أ + ب}{ب + ج} = \frac{ب}{ج}$

الحل :-

نفرض أن $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$ ← ب = ج م ، أ = ج م^2

الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{أ + ب}{ب + ج}$	$\frac{ب}{ج}$
= تعويض $\frac{ج م^2 + ج م}{ج م + ج}$	$= \frac{ج م}{ج}$
$\frac{ج م(م + 1)}{ج(م + 1)}$	= م
= م ← (١)	من (١) (٢) الطرفان متساويان

(٤) إذا كان ب وسط متناسبين ا ، ج

أثبت أن : $\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{ج}^2}=\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$

الحل :-

نفرض أن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{ج}}=\text{م}$ ← $\text{ب} = \text{ج م}$ ، $\text{ا} = \text{ج م}^2$

الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{\text{ا}^2+\text{ب}^2}{\text{ب}^2+\text{ج}^2}=\frac{(\text{ج م}^2)^2+(\text{ج م})^2}{(\text{ج م})^2+(\text{ج})^2}$	$\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$
$=\frac{\text{ج}^2\text{م}^4+\text{ج}^2\text{م}^2}{\text{ج}^2\text{م}^2+\text{ج}^2}=\frac{\text{ج}^2\text{م}^2(\text{م}^2+1)}{\text{ج}^2(\text{م}^2+1)}$	$=\frac{\text{ج م}^2}{\text{ج}}$ $=\text{م}^2$ ← (٢)
$=\text{م}^2$ ← (١)	من (١) (٢) الطرفان متساويان

(٥) إذا كان ا ، ب ، ج كميات متناسبة

أثبت أن : $\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ب}^2}{\text{ج}^2}=\frac{2\text{ا}}{\text{ج}}$

الحل :-

نفرض أن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}=\frac{\text{ب}}{\text{ج}}=\text{م}$ ← $\text{ب} = \text{ج م}$ ، $\text{ا} = \text{ج م}^2$

الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{ب}^2}{(\text{ج})^2}$	$\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$
$=\frac{\text{ج}^2\text{م}^4}{\text{ج}^2\text{م}^2}+\frac{\text{ج}^2\text{م}^2}{\text{ج}^2}$ $=\text{م}^2+\text{م}^2=2\text{م}^2$ ← (١)	$=\frac{2\text{ج م}^2}{\text{ج}}$ $=2\text{م}^2$ ← (٢)
من (١) (٢) الطرفان متساويان	

(٦) إذا كان ا ، ب ، جـ متناسبة

أثبت أن : $\frac{ا - ب}{ا - جـ} = \frac{ب}{ب + جـ}$

الحل :-

نفرض أن $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{جـ} = م$ ← ب = جـ م ، ا = جـ $م^{٢}$

الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
$\frac{ب}{ب+جـ} = \frac{جـ م}{جـ م + جـ}$	$\frac{ا-ب}{ا-جـ} = \frac{جـ م^{٢} - جـ م}{جـ م^{٢} - جـ}$
$= \frac{جـ م}{جـ(م+١)}$	$= \frac{جـ م(م-١)}{جـ(م^{٢}-١)}$
$= \frac{م}{(م+١)}$ ← ٢	$= \frac{م(م-١)}{(م^{٢}-١)} = \frac{م(م-١)}{(م-١)(م+١)}$
من (١) (٢) الطرفان متساويان	$= \frac{م}{م+١}$ ← ١

(٧) إذا كان ا ، ب ، جـ ، ء كميات فى تناسب متسلسل

أثبت أن $\frac{ب^{٢} + جـ^{٢}}{جـ^{٢} + ء^{٢}} = \frac{اجـ}{ب ء}$

نفرض أن $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{ء} = م$ ← جـ = ء م ، ب = ء $م^{٢}$ ، ا = ء $م^{٣}$

الطرف الأيمن	الطرف الأيسر
$\frac{\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}+\text{د}^{٢}}=\frac{(\text{د م}^{٢})^{٢}+(\text{د م})^{٢}}{(\text{د م})^{٢}+(\text{د})^{٢}}$	$\frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}}=\frac{\text{د م}^{٣}\times\text{د م}}{\text{د م}^{٢}\times\text{د}}$
$=\frac{\text{د}^{٢}\text{م}^{٤}+\text{د}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{د}^{٢}\text{م}^{٢}+\text{د}^{٢}}=\frac{\text{د}^{٢}\text{م}^{٢}(\text{م}^{٢}+١)}{\text{د}^{٢}(\text{م}^{٢}+١)}$	$=\frac{\text{د}^{٢}\text{م}^{٤}}{\text{د}^{٢}\text{م}^{٢}}$ = $\text{م}^{٢}$ ← ١
= $\text{م}^{٢}$ ← ١	من (١) (٢) الطرفان متساويان



تمــاريــن

(١)	أوجد قيمة هـ لتحصل على كميات متناسبة :-	
١	(١) ٦ ، هـ ، ٢٤	(٢) ٤ ، هـ ، ٩
	(٣) ٩ ، -١٢ ، هـ	(٤) $\frac{1}{2}$ ، هـ ، ٨
	(٥) هـ ، -٦ ، ٤٨	(٦) ٢أ^2 ب^2 ، أ ب ، هـ
	(٧) ٢س^{3}ص^3 ، هـ ، ٨ س$^{-3}$ ص	(٨) س^2 ، -٥ س ، هـ
	(٩) أ ، هـ ، أ ب^2	(١٠) هـ ، ١٨ أ ، ٢٧ أ^2
	(١١) هـ ، ٦ أ^2 ب^3 ، -٤ أ^2 ب^3	(١٢) ٤أ ، هـ ، ٢٥ أ^3 ب
٢	إذا كان أ ، ب ، جـ كميات متناسبة أثبت أن :-	
	(١) $\frac{أ}{ج} = \frac{ب^2}{ج^2}$	(٢) $\frac{ب}{ب+ج} = \frac{أ}{أ+ب}$
	(٣) $\frac{أ-ب}{أ-ج} = \frac{أ}{أ+ب}$	(٤) $\frac{ب-ج}{أ-ب} = \sqrt{\frac{ج}{أ}}$
	(٥) $\frac{أ^2+ب^2}{ب^2+ج^2} = \frac{أ}{ج}$	(٦) $\frac{أ^2+4ب^2}{ب^2+4ج^2} = \frac{أ}{ج}$
	(٧) $\frac{أ^2}{ب^2} + \frac{ب^2}{ج^2} = \frac{2أ}{ج}$	(٨) $\frac{ب^2-ج^2}{أ^2+ج^2} = \frac{أ^2-ج^2}{ج^2}$
٣	إذا كان أ ، ب ، جـ ، ء فى تناسب متسلسل أثبت أن :-	
	(١) $\frac{ب+ج}{ج+ء} = \frac{أ+ب}{ب+ج}$	(٢) $\frac{ب-2ج}{3ج+4ء} = \frac{أ-2ب}{3ب+4ج}$
	(٣) $\frac{ج^2-ء^2}{أ-ج} = \frac{بء}{أ}$	(٤) $\frac{أ+2ب}{ب} = \frac{ج+2ء}{ء}$

الدرس الثامن

التغير

أولاً : التغير الطردي

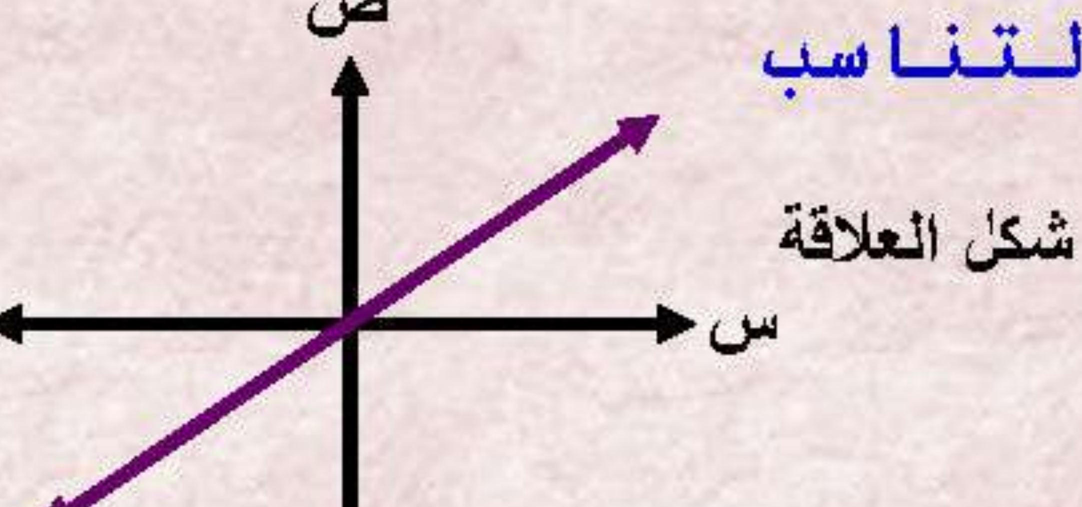
إذا كانت الكمية ص تتغير طردياً مع الكمية س يكون

ص∝س

١- ص = م س م ≠ ٠ ثابت التغير قانون العلاقة

٢- $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{س_1}{س_2}$ قانون التناسب

شكل العلاقة



أمثلة

(١) إذا كانت ص تتغير طردياً مع س وكانت ص = ٨ عندما س = ١٦ أوجد :

١- العلاقة بين المتغيرين ص ، س　　　٢- قيمة ص عندما س = ٦

الحل

ص	٨	؟
س	١٦	٦

∵ ص∝س

∴ ص = م س

$م = \frac{ص}{س} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$ ثابت التغير

١- ∴ العلاقة بين ص ، س هي $ص = \frac{١}{٢} س$

٢- عند س = ٦ ⇐ $ص = \frac{١}{٢} \times ٦ = ٣$

تدريب

إذا كانت ص∝س وكانت ص = ٥ عندما س = ٢ أوجد :

١- العلاقة بين المتغيرين ص ، س　　　٢- قيمة ص عندما س = ٦

٣- قيمة ص عندما س = ١٠　　　٤- قيمة ص عندما س = ٨

(٢) إذا كانت ص تتغير بتغير س وكانت س = ٢ عندما ص = ٧ أوجد :

١- العلاقة بين المتغيرين ص ، س   ٢- قيمة ص عندما س = ١٤

٣- س عندما ص = ٢١

الحل

∵ ص ∝ س

∴ ص = م س

$م = \frac{ص}{س} = \frac{٧}{٢}$

١- ∴ العلاقة بين المتغيرين $ص = \frac{٧}{٢} س$

٢- عندما س = ١٤ ⟸ $ص = \frac{٧}{٢} \times ١٤ = ٤٩$

٣- عندما ص = ٢١ ⟸ $٢١ = \frac{٧}{٢} س$ ∴ $س = \frac{٢١ \times ٢}{٧} = ٦$

(٣) إذا كانت مربع السرعة ع لجسم ساقط من ارتفاع معين تتغير بتغير المسافة ف التي سقطها رأسياً وكانت ع = ٢١ م/ث عندما كانت ف = ٢٢,٥ م

أوجد سرعة الجسم بعد هبوطه مسافة ٦٢,٥ م

ع	٢١	؟
ف	٢٢,٥	٦٢,٥

الحل

$ع^٢ \propto ف$

$ع^٢ = م ف$

$م = \frac{ع^٢}{ف} = \frac{(٢١)^٢}{٢٢,٥} = ١٩,٦$

١- العلاقة بين المتغيرين هي $ع^٢ = ١٩,٦ ف$

٢- عند ف = ٦٢,٥ ⟸ $ع^٢ = ١٩,٦ \times ٦٢,٥ = ١٢٢٥$

∴ $ع = \pm\sqrt{١٢٢٥} = \pm ٣٥$ م / ث

ثانياً : التغير العكسي

إذا تغيرت ص عكسياً مع س أو (طردياً مع $\frac{١}{س}$)

يكون



١- $ص = \frac{م}{س}$ العلاقة

٢- $\frac{ص_٢}{ص_١} = \frac{س_١}{س_٢}$ التناسب

(١) إذا تغيرت ص عكسياً مع س وكانت ص = ١٢ عندما س = ٨ أوجد :

١- العلاقة بين ص ، س　　٢- قيمة ص عندما س = ١,٥　　٣- س عندما ص = ٤

الحل

$\because$ ص $\propto \frac{١}{س}$

$\therefore$ ص $= \frac{م}{س}$

$\therefore$ م $=$ ص $\times$ س $= ١٢ \times ٨ = ٩٦$

١- $\therefore$ العلاقة بين المتغيرين ص $= \frac{٩٦}{س}$

٢- عند س = ١,٥ $\Leftarrow$ ص $= \frac{٩٦}{١,٥} = ٦٤$

٣- عند ص = ٤ $\Leftarrow$ $\frac{٤}{١} = \frac{٩٦}{س}$ $\Leftarrow$ س $= \frac{٩٦ \times ١}{٤} = ٢٤$

(٢) إذا كانت ص تتغير طردياً مع $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ١٤ عندما س = ٣ أوجد :

١- العلاقة بين المتغيرين　　٢- ص عندما س = ٦　　٣- س عندما ص = ٢

الحل

$\because$ ص $\propto \frac{١}{س}$

$\therefore$ ص $= \frac{م}{س}$

$\therefore$ م $=$ ص $\times$ س $= ١٢ \times ٨ = ٤٢$

١- $\therefore$ العلاقة بين المتغيرين ص $= \frac{٤٢}{س}$

٢- عند س = ٦ $\Leftarrow$ ص $= \frac{٤٢}{٦} = ٧$

٣- عند ص = ٢ $\Leftarrow$ $\frac{٢}{١} = \frac{٤٢}{س}$ $\Leftarrow$ س $= \frac{٤٢ \times ١}{٢} = ٢١$

(٣) إذا كانت ٢٠ بنت تصنع سجادة في ١٥ يوم
ففي كم يوم ؟ يصنع ٣٠ بنت نفس السجادة مع تساوي القدرة

الحل

نفرض عدد البنات = ص ، عدد الأيام = س

ص	٢٠	٣٠
س	١٥	؟

∴ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ص = $\frac{م}{س}$

م = ص × س = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠

١- ∴ العلاقة بين المتغيرين ص = $\frac{٣٠٠}{س}$

٢- عند ص = ٣٠ ⇐ $\frac{٣٠}{١} = \frac{٣٠٠}{س}$ ⇐ س = $\frac{٣٠٠ \times ١}{٣٠}$ = ١٠ أيام

(٤) إذا كانت س = ٩ + ع وكانت ع ∝ ص أوجد
العلاقة بين س ، ص إذا علم أن س = ٢٤ عندما ص = ٥ ثم أوجد س عند ص = ١

الحل

س = ٩ + ع ع ∝ ص

∴ س = ٩ + م ص ع = م ص

٢٤ = ٩ + ٥م

٢٤ − ٩ = ٥م ← ٥م = ١٥ م = ٣

١- ∴ العلاقة بين س ، ع هي س = ٩ + ٣ص

٢- عند ص = ١ ⇐ س = ٩ + ٣ × ١ = ١٢

(٥) إذا كانت ص = أ + ٧ وكانت أ $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٨ عندما س = ٢ أوجد :

١- العلاقة بين س ، ص   ٢- قيمة ص عندما س = ٦

الحل

ص = أ + ٧   أ $\propto \frac{١}{س}$

$\therefore$ ص $= \frac{م}{س} + ٧$ أ $= \frac{م}{س}$

$٨ = \frac{م}{٢} + ٧$

$٨ - ٧ = \frac{م}{٢}$ ← $\frac{م}{٢} = ١$ م = ٢

١- $\therefore$ العلاقة بين س ، ص هي ص $= \frac{٢}{س} + ٧$

٢- عند س = ٦ ⇐ ص $= \frac{٢}{٦} + ٧ = \frac{٢٣}{٦}$

ملاحظات

إذا كان :

١- ص = م س ⟸ $\frac{ص}{س} = م$ فإن ص $\propto$ س

٢- ص = $\frac{م}{س}$ ⟸ ص س = م   فإن ص $\propto \frac{١}{س}$

(٦) اذا كان $\frac{٣س + ص}{س + ٣ص} = \frac{١}{٢}$ أثبت أن : ص $\propto$ س

الحل

فكرة حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

(س + ٣ص) = ٢ (٣س + ص)

س + ٣ ص = ٦ س + ٢ ص

٣ص – ٢ ص = ٦ س – س

ص = ٥ س

$\therefore$ ص = م س ⟸ ص $\propto$ س

(٧) اذا كان $س^٢ ص^٢ - ١٠$ س ص + ٢٥ = ٠ أثبت أن ص $\propto \frac{١}{س}$

الحل

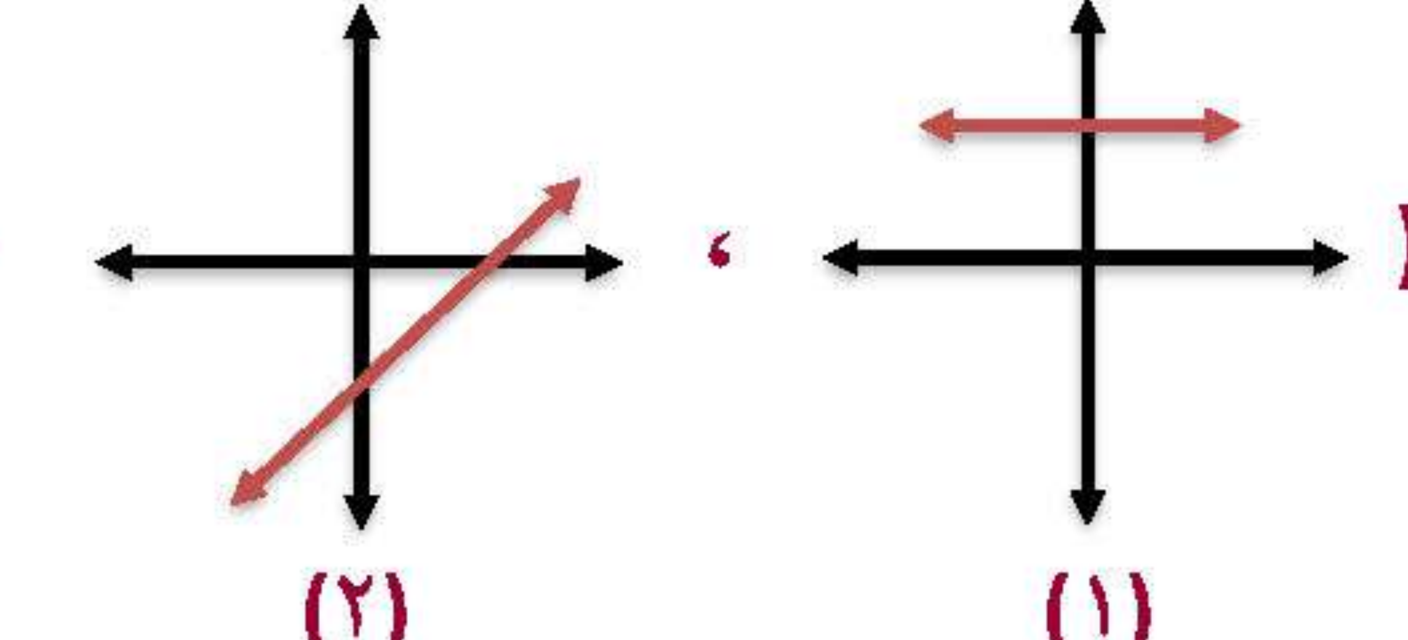
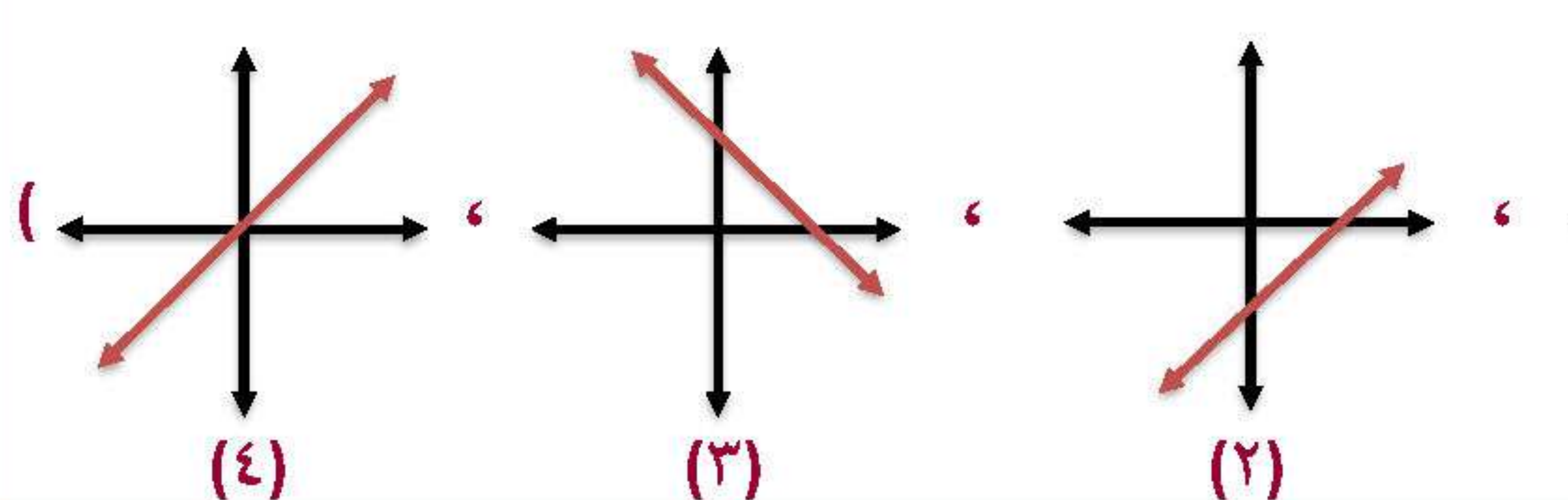
فكرة التحليل (س ص – ٥) (س ص – ٥) = ٠

أما س ص – ٥ = ٠

∴ س ص = ٥ بالقسمة على س

ص = $\frac{٥}{س}$

ص = $\frac{م}{س}$ ⟸ ص $\propto \frac{١}{س}$

(٨)	اختر الاجابة الصحيحة
١	(١) س ص = ٧ فإن ص ∝ .... ($\frac{١}{س}$ ، س – ٧ ، $س^٨$ ، س)
٢	$\frac{س}{ص} = \frac{٧}{٢}$ فإن ص ∝ .... (س ، $\frac{١}{س}$ ، س + $\frac{٧}{٢}$ ، س - $\frac{٧}{٢}$)
٣	العلاقة التى تمثل تغير طردى بين س ، ص هى .... (س ص = ٥ ، ص = س + ٣ ، $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ ، $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٢}$)
٤	إذا كان س $ص^٢$ = م حيث م ثابت ≠ ٠ فإن س تتغير عكسياً مع .... ($\frac{١}{ص^٢}$ ، $\frac{١}{ص}$ ، ص ، $ص^٢$)
٥	الجدول: س: ١، ٥، ٢ — ص: ٣، ١٥، ٦ العلاقة بين ص ، س علاقة تتغير : (طردى ، عكسى ، لا طردى ولا عسى)
٦	الشكل الذى يمثل علاقة طردية هو شكل ....   ((١) ، (٢) ، (٣) ، (٤))



تمارين

(١) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٦ عند س = ٣ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة س عند ص = ٢٠

(٢) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ٢ عند س = ٣ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة ص عند س = ٦

(٣) إذا كانت ص $\propto$ س وكانت ص = ١٠ عند س = ٢ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة ص عند س = ٣

(٤) إذا كان ص $\propto$ س^{٢} وكانت ص = ٨ عندما س = ٢ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة ص عند س = ٣

(٥) إذا كان ص= ٣ + ا وكان ا $\propto$ س ، ص = ٨ عند س = ١ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- أوجد س عند ص = ١٨

(٦) فى الشكل علاقة بين ص ، س

س	٢	٥	٦
ص	٤	١٠	١٢

(ا) بين نوع التغير بين ص ، س
(ب) أوجد ثابت التغير
(جـ) أوجد قيمة ص عندما س = ٣
(ء) أوجد قيمة س عندما ص = ٨

(٧) إذا كان وزن جسم على الأرض و يتناسب طردياً مع وزنه على القمر ر فإذا كان و$_{١}$ = ١٨٢ كجم ، ر$_{١}$ = ٣٥ كجم أوجد ر$_{٢}$ عندما و$_{٢}$ = ٣١٢ كجم

(٨) إذا كان : $\frac{٢ا - ب}{ا + ٣ب} = \frac{١}{٣}$
أثبت أن : ا $\propto$ ب

(٩) إذا كان :-
ص^{٢} – ١٠ س ص + ٢٥ س^{٢} =
أثبت أن : ص $\propto$ س

(١٠) إذا كان :- ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ٣ عند س = ٢ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة ص عندما س = ١,٥

(١١) إذا كان :- ص $\propto$ $\frac{١}{س}$ وكانت ص = ١٠ عند س = ٣ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة ص عندما س = ٥

(١٢) إذا كانت :- ص تتغير عكسياً مع س وكانت ص = ١ عندما س = ٣ أوجد
١- العلاقة بين ص ، س
٢- قيمة ص عندما س = ٦

(١٣) إذا كان :- ص $\propto \frac{١}{س^{٢}}$ وكانت ص = ١ عند س = -٢ أوجد

١- العلاقة بين ص ، س

٢- قيمة س عند ص = $\frac{١}{٤}$

(١٤) إذا كان ص= ٣ + أ وكان أ $\propto \frac{١}{س}$ وكانت ص = ٥ عندما س = ١ أوجد

١- العلاقة بين ص ، س

٢- قيمة ص عندما س = ٢

(١٥) فى الشكل علاقة بين ص ، س

س	٣	٨	٦	١٢
ص	٨	٣	٤	٢

(أ) بين نوع التغير بين ص ، س

(ب) أوجد ثابت التغير

(جـ) أكتب العلاقة بين ص ، س

(ء) أوجد قيمة ص عندما س = ٤٨

(هـ) أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

(١٦) إذا كان مقدار السرعة ع التى تخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتغير عكسياً مع تغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم نق وكانت ع = ٢٧ سم عندما نق = ١٠,٥ سم أوجد ع عندما نق = ١٥,٧٥ سم

(١٧) إذا كان : $س^{٢} ص^{٢} - ٦ س ص + ٩ = ٠$

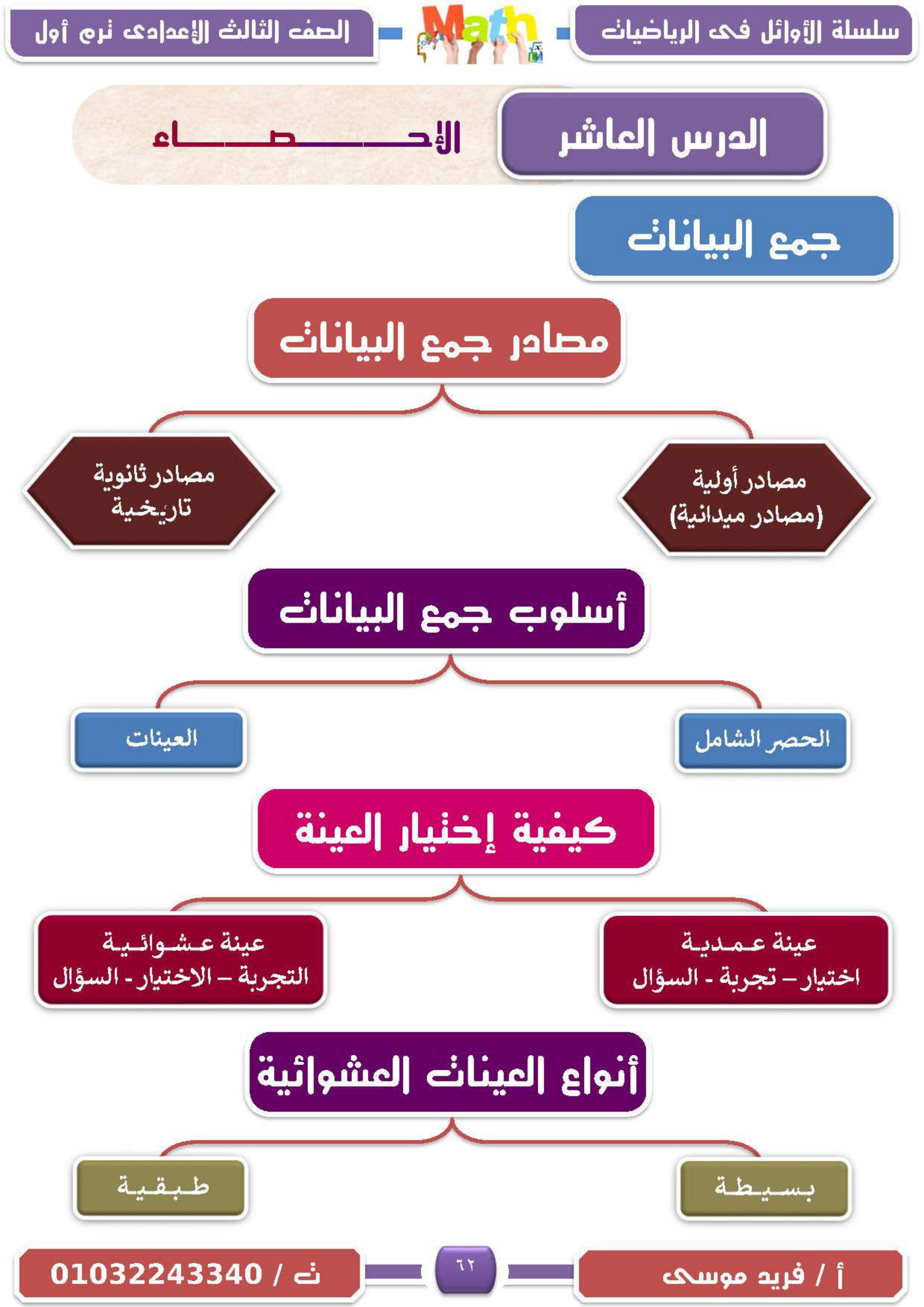
أثبت أن: ص $\propto \frac{١}{س}$

(١٨) إذا كان : $س^{٤} ص^{٢} - ١٤ س^{٢} ص + ٤٩ = ٠$

أثبت أن: ص $\propto \frac{١}{س^{٢}}$

(١٩) إذا كان : س ، ص موجبان وكان $س^{٢} ص^{٢} - ٩ = ٠$

أثبت أن: ص $\propto \frac{١}{س}$



الدرس العاشر

الإحــــــــصــــــــاء

جمع البيانات

مصادر جمع البيانات

- مصادر أولية (مصادر ميدانية)
- مصادر ثانوية تاريخية

أسلوب جمع البيانات

- الحصر الشامل
- العينات

كيفية إختيار العينة

- عينة عـمـديـة: اختيار – تجربة - السؤال
- عينة عـشـوائـيـة: التجربة – الاختيار - السؤال

أنواع العينات العشوائية

- بـسـيـطـة
- طـبـقـيـة

التشتت

هو التجانس بين مجموعة قيم (مفردات)
* مقاييس التشتت ١- المدى ٢- الانحراف المعياري

أولاً : المدى

هو الفرق بين أكبر قيمة واصغر قيمة لمجموعة مفردات
فمثلاً
٢-
ا = {٥٧،٥٨،٥٣،٥٥،٥١،٦٠} ب = {٤٥،٤٢،٤٢،٩٢،٤٩،٥٢،٤٧}
المدي = ٦٠ – ٥١ = ٩ المدي = ٩٢ – ٤٢ = ٥٠
* نلاحظ أن المجموعة ب أكثر تشتتاً من المجموعة ا
* الأكثر تشتتاً ⇐ أقل تجانس
الأقل تشتتاً ⇐ أكثر تجانس
تشتت منعدم ⇐ تجانس تام ⇐ المفردات متساوية

ثانياً : الانحراف المعياري

هو أرق مقاييس التشتت
هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات قيم المتغير عند وسطها الحسابي
١- الانحراف المعياري لعدة قيم (مفردات)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^2}{ن}}$$

$\overline{س}$ = الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

$$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

حيث ن عدد القيم (المفردات)

(١) احسب الانحراف المعياري للقيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

الحل

$$\bar{\text{س}} = \frac{٢+٣+٤+٥+٦}{٥} = ٤$$

س	س − س̄	(س − س̄)²
٢	٢ − ٤ = -٢	٤
٣	٣ − ٤ = -١	١
٤	٤ − ٤ = ٠	٠
٥	٥ − ٤ = ١	١
٦	٦ − ٤ = ٢	٤
	Σ	١٠

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}}$$

$$\sqrt{\frac{١٠}{٥}} = \sqrt{٢} = ١,٤١$$

(٢) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٦ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ٤

الحل

$$\bar{\text{س}} = \frac{٦+٥+٧+٩+١١+٤}{٦} = ٧$$

س	س − س̄	(س − س̄)²
٦	٦ − ٧ = -١	١
٥	٥ − ٧ = -٢	٤
٧	٧ − ٧ = ٠	٠
٩	٩ − ٧ = ٢	٤
١١	١١ − ٧ = ٤	١٦
٤	٤ − ٧ = -٣	٩
	Σ	٣٤

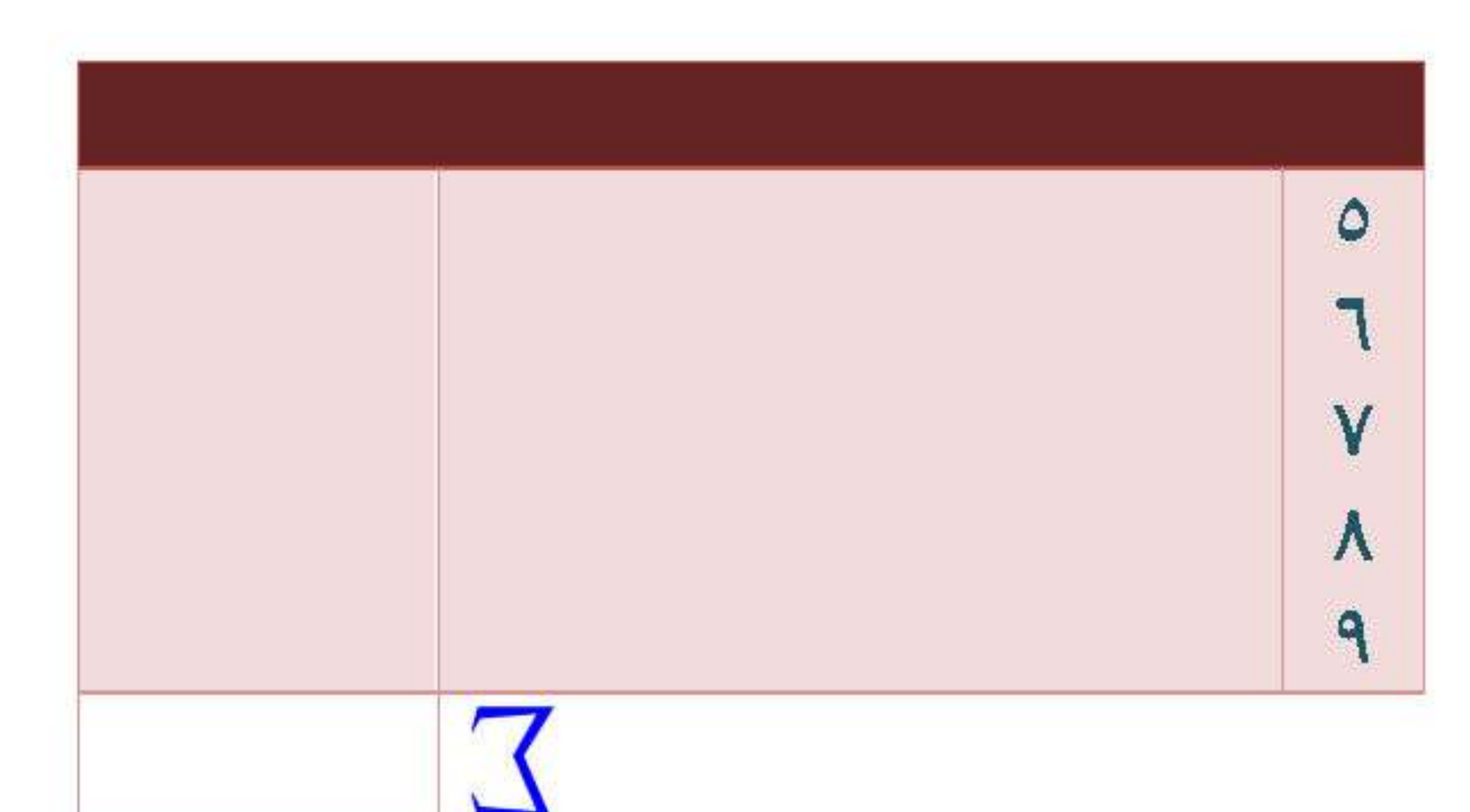
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}}} = \sqrt{\frac{٣٤}{٦}} = ٢,٣٨$$

تدريب

(٣) احسب الانحراف المعياري للقيم ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

الحل

$\bar{\text{س}} =$ ....



٥		
٦		
٧		
٨		
٩		
	Σ	

$$\sigma = \sqrt{\frac{..........}{..........}}$$

٢- حساب الانحراف المعياري لتوزيع تكراري (جدول مجموعات)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢} \times ك}{\sum ك}} \qquad \overline{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك}$$

(١) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٤	٢	٢٠

الحل

المجموعات	ك	س	ك×س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^{٢}$		$(س - \overline{س})^{٢} \times ك$
-٥	٣	١٠	٣٠	١٠-٢٩= -١٩	٣٦١ ×	٣	١٠٨٣
-١٥	٤	٢٠	٨٠	٢٠-٢٩= -٩	٨١ ×	٤	٣٢٤
-٢٥	٧	٣٠	٢١٠	٣٠-٢٩= ١	١ ×	٧	٧
-٣٥	٤	٤٠	١٦٠	٤٠-٢٩= ١٩	١٢١ ×	٤	٤٨٤
-٤٥	٢	٥٠	١٠٠	٥٠-٢٩= ٢١	٤٤١ ×	٢	٨٨٢
	٢٠		٥٨٠				٢٧٨٠

$$\overline{س} = \frac{\sum (ك \times س)}{\sum ك} = \frac{٥٨٠}{٢٠} = ٢٩ \Uparrow$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^{٢} \times ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٢٧٨٠}{٢٠}} = ١١,٧٩$$

(٢) أوجد الانحراف المعياري للتوزيـع التكراري الآتي

المجموعات	صفر-	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	المجموع
التكرار	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل

المجموعات	ك	س	ك×س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 \times ك$
-٠	٢	٥	١٠	٥ - ٣٠ = -٢٥	٦٢٥ ×	٢ ١٢٥٠
-١٠	٥	١٥	٧٥	١٥-٣٠ = -١٥	٢٢٥ ×	٥ ١١٢٥
-٢٠	١١	٢٥	٢٧٥	٢٥ - ٣٠ = -٥	٢٥ ×	١١ ٢٧٥
-٣٠	١٥	٣٥	٥٢٥	٣٥ − ٣٠ =	٢٥ ×	١٥ ٣٧٥
-٤٠	٧	٤٥	٣١٥	٥	٢٢٥ ×	٧ ١٥٧٥
				٤٥-٣٠ = ١٥		
	٤٠		١٢٠٠			٤٦٠٠

$$\overline{س} = \frac{\sum (ك \times س)}{\sum ك} = \frac{١٢٠٠}{٤٠} = ٣٠ \Uparrow$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س - \overline{س})^2 \times ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٤٦٠٠}{٤٠}} = ١٠,٧٢٤$$

تدريب

أوجد الانحراف المعياري للتوزيـع التكراري التالي

المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٣	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠

الحل

المجموعات	ك	س	ك×س	$س - \overline{س}$	$(س - \overline{س})^2$	$(س - \overline{س})^2 \times ك$
-٠	٣					
-١٠	١٠					
-٢٠	١٢					
-٣٠	١٠					
-٤٠	٥					

(٢) أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة للتوزيع التكراري

عدد الوحدات التالفة	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٣	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٩

الحل

س	ك	س×ك	س ـ $\bar{س}$	$(س-\bar{س})^٢$		$(س-\bar{س})^٢$×ك	
٠	٣	٠	٠ ـ ٣ = -٣	٩	×	٣	٢٧
١	١٦	١٦	١ - ٣ = -٢	٤	×	١٦	٦٤
٢	١٧	٣٤	٢ ـ ٣ = -١	١	×	١٧	١٧
٣	٢٥	٧٥	٣ ـ ٣ = ٠	٠	×	٢٥	٠
٤	٢٠	٨٠	٤ - ٣ = ١	١	×	٢٠	٢٠
٥	١٩	٩٥	٥ - ٣ = ٢	٤	×	١٩	٧٦
	١٠٠	٣٠٠					٢٠٤

$\bar{س} = \frac{\sum س \times ك}{\sum ك} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (س-\bar{س})^٢ \times ك}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{٢٠٤}{١٠٠}} = ١,٤٢٨$

تمـــــاريـــــن

(١) أكمل

١- مصادر جمع البيانات هي ...... ، ....

٢- من أساليب جمع البيانات هي ...... ، ....

٣- اختيار عينة عشوائية من طبقات المجتمع تسمى بالعينة ....

٤- من مقاييس التشتت .... ، ....

٥- من مقاييس النزعة المركزية .... ، .... ، ....

٦- الجزر التربيعي لمجموع مربعات انحرافات القيم عند وسطها الحسابي هو ....

٧- أبسط مقاييس التشتت ....

٨- أدق مقاييس التشتت ....

٩- المجموعات الأكثر تجانساً يكون فيها التشتت ....

١٠- المجموعات الأقل تجانساً يكون فيها التشتت ....

١١- عندما يكون التشتت = صفر فإن جميع المفردات ....

١٢- المدى للقيم ٥ ، ١ ، ٧ ، ٣ هو ....

١٣- المدى للقيم ٧ ، ٧ ، ٧ هو ....

١٤- إذا كان المدى لمجموعة هو ٤٠ وكان أصغر القيم ١٧ فإن أكبر القيم يساوي ....

(٢) أحسب المدى والانحراف المعياري

أ) ٥ ، ٤ ، ٢ ، ١٠ ، ٩

ب) ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

ج) ٥ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ٦

ء) ٢٢ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٨

(٣) احسب الانحراف المعياري للتوزيعات التكرارية التالية

أ)

المجموعات	-٠	-٤	-٨	-١٢	-١٦	المجموع
التكرار	٢	٤	٨	٤	٢	٢٠



المجموعات	-٥	-١٥	-٢٥	-٣٥	-٤٥	المجموع
التكرار	٢	١٠	١٢	١٠	٥	٤٠



المجموعات	-٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	المجموع
التكرار	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠



العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الاطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠



الدرجة	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
عدد الطلاب	١	٤	٥	٤	١	١٥

أولاً : حساب المثلثات

الدرس الأول وحدات قياس الزاوية

الدرجة – الدقيقة - الثانية

١° = ٦٠´   ١´ = ٦٠״

درجات نقط ⇄ درجات -دقائق - ثواني

الدرجات ״ الدقائق ״ الثواني ״ =

١- ٤٥,١٢٥° ← ٣٠״ ٧´ ٤٥°

٢- ١٠٠,٢٦٤° ←

٣- ١٢٠,٠١٢° ←

٤- → ٦״ ١٢´ ٧٠°

٥- → ١٥״ ٢٤´ ٩٠°

٦- → ٢٥´ ٣٠°

النسب المثلثية للزاوية الحادة

١- جاجـ = المقابل / الوتر = أب / أجـ

٢- جتاجـ = المجاور / الوتر = بجـ / أجـ

٣- ظاجـ = المقابل / المجاور = أب / بجـ

أ، ب، جـ — الوتر — المقابل — المجاور

(١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٣سم
ب جـ = ٤سم أوجد النسب المثلثية للزاويتين جـ ، أ

الحل

أ جـ = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥سم

جا جـ = $\frac{٣}{٥}$ جا أ = $\frac{٤}{٥}$

جتا جـ = $\frac{٤}{٥}$ جتا أ = $\frac{٣}{٥}$

ظا جـ = $\frac{٣}{٤}$ ظا أ = $\frac{٤}{٣}$

(٢) أ ب جـ مثلث فيه ق(جـ) = ٩٠° ، أ ب = ١٣سم
أ جـ = ١٢سم

١- أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، ب

٢- برهن أن : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = ١

٣- أوجد قياس زوية أ

الحل

ب جـ = $\sqrt{١٣^٢ - ١٢^٢}$ = ٥سم

١-

جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ جا ب = $\frac{١٢}{١٣}$

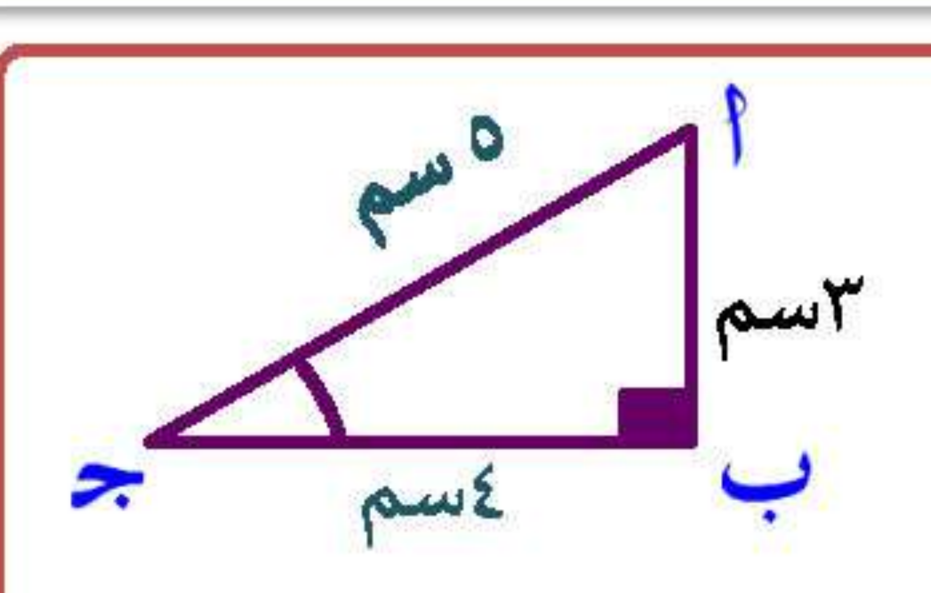
جتا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ جتا ب = $\frac{٥}{١٣}$

ظا أ = $\frac{٥}{١٢}$ ظا ب = $\frac{١٢}{٥}$

٢- جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = $\left(\frac{٥}{١٣}\right)\left(\frac{٥}{١٣}\right) + \left(\frac{١٢}{١٣}\right)\left(\frac{١٢}{١٣}\right) = ١$

٣- ق(أ) = ١١″ ٣٧′ ٢٢°

SH sin $\left(\frac{5}{13}\right)$ = ″″



(٣) اب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه أج = ٥ سم

ب ج = ٤ سم

أوجد ١- النسب المثلثية للزاويتين ج ، أ

٢- قيمة ظاأظاج + ٢

٣- قياس زوية ج

الحل

$$\text{اب} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{سم}$$

١- $\text{جاج} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\text{جاأ} = \frac{4}{5}$

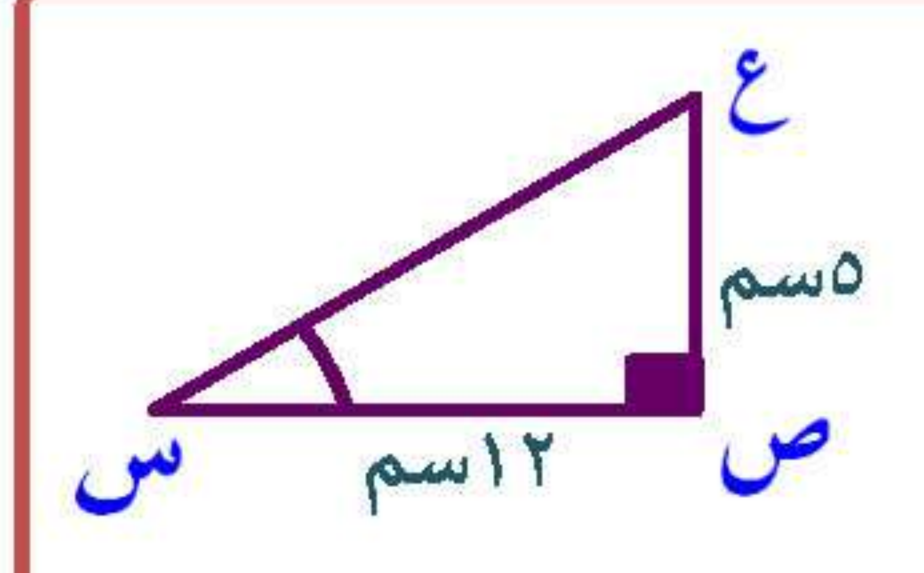
$\text{جتاج} = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\text{جتاأ} = \frac{3}{5}$

$\text{ظاج} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $\text{ظاأ} = \frac{4}{3}$

٢- $\text{ظاأظاج} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} + 2 = 1 + 2 = 3$

٣- $\text{ق}(\text{ج}) = 11^{\prime\prime}\ 37^{\prime}\ 22^{\circ}$ $\qquad$ $\text{SH} \cos\left(\frac{4}{5}\right) = {}^{\circ\circ\circ}$

تدريب



أكمل من الشكل المرسوم

١- ع س = ...

٢- جاس = ... $\qquad$ جاع = ...

جتاس = ... $\qquad$ جتاع = ...

ظاس = ... $\qquad$ ظاع = ...

٣- جتا٢ س + جا٢ ع = ...

٤- ق(س) = ...



(٤) ابجـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان ٢اب = $\sqrt{3}$ اجـ

اجـ = فأوجد

١- النسب المثلثية للزاوية جـ

٢- ق $(\hat{أ})$

الحل

∵ ٢اب = $\sqrt{3}$ اجـ

∴ $\frac{اب}{اجـ} = \frac{\sqrt{3}}{٢}$ ← مقابل ، ← وتر

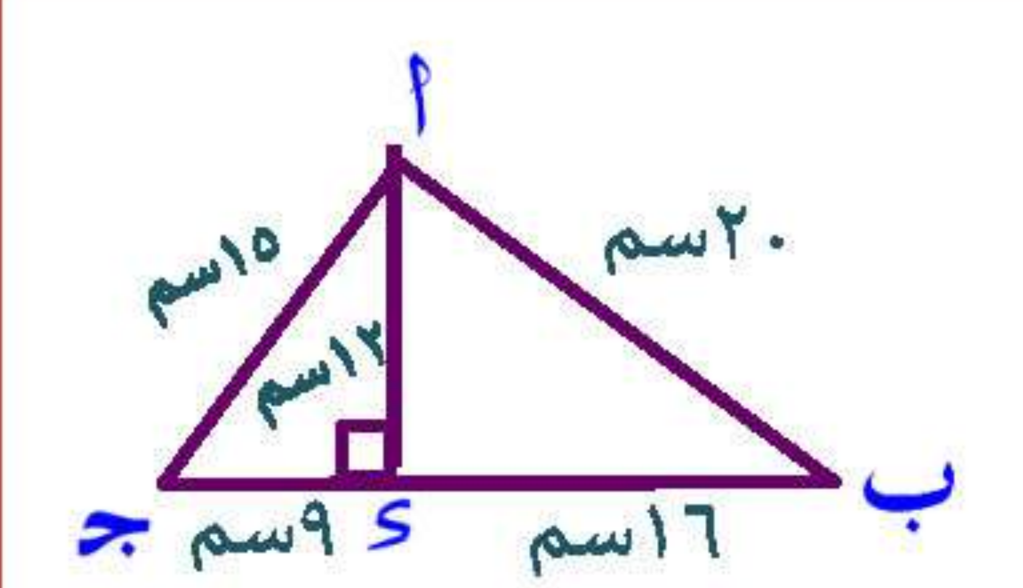
بجـ = $\sqrt{(٢)^2 - (\sqrt{3})^2}$ = ١

١- جاجـ = $\frac{\sqrt{3}}{٢}$ جتاجـ = $\frac{١}{٢}$ ظاجـ = $\sqrt{3}$

٢- جاأ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق $(\hat{أ})$ = ٣٠° SH sin $\left(\frac{1}{2}\right)$ = ,,,

(٥) ابجـ في الشكل المرسوم : أوجد



١- جاب، جتاجـ

٢- ظابظاجـ

٣- جتابجتا(بأء) - جابجا(بأء)

الحل

في Δ أءجـ ← أء = $\sqrt{١٥^2 - ٩^2}$ = ١٢ سم

في Δ ابء ← اب = $\sqrt{١٢^2 + ١٦^2}$ = ٢٠ سم

١- جاجـ = $\frac{١٢}{٢٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جتاجـ = $\frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

٢- ظابظاجـ = $\frac{١٢}{١٦} \times \frac{١٢}{٩}$ = ١

٣- جتابجتا(بأء) - جابجا(بأء) = $\left(\frac{١٦}{٢٠}\right)\left(\frac{١٢}{٢٠}\right) - \left(\frac{١٢}{٢٠}\right)\left(\frac{١٦}{٢٠}\right)$ = صفر

ملاحظات

في Δ ا ب جـ إذا كان ق $(\hat{ب}) = ٩٠°$

ق $(\hat{ا})$ + ق $(\hat{جـ}) = ٩٠°$ متتامتان

١- جا ا = جتا جـ ← جا ا − جتا جـ = صفر

جا ا ÷ جتا جـ = ١

جا ا + جتا جـ = ٢ جا ا = ٢ جتا جـ

جا ا × جتا جـ = جا² ا = جتا² جـ

٢- جتا ا = جا جـ

٣- ظا ا = $\frac{١}{ظا جـ}$ ← ظا ا × ظا جـ = ١

(٦) أكمل

١- جا ٣٠ = جتا ....

٢- جا ٨٠ = جا ....

٣- إذا كان : زاوية ا تتمم زاوية ب فإن :

جا ا = ... جتا ا = ... ظا ا ظا ب = ...

جا ا − جتا ب = ... جا ا ÷ جتا ب = ...

(٧) اختر

١- Δ ا ب جـ قائم في ب فإن جا ا + جتا جـ = ...

(ا) جا ب (ب) ظا ب (جـ) ٢ جا جـ (د) ٢ جا ا

٢- في Δ س ص ع فيه ق (س) = ٩٠° يكون ظا ص = ...

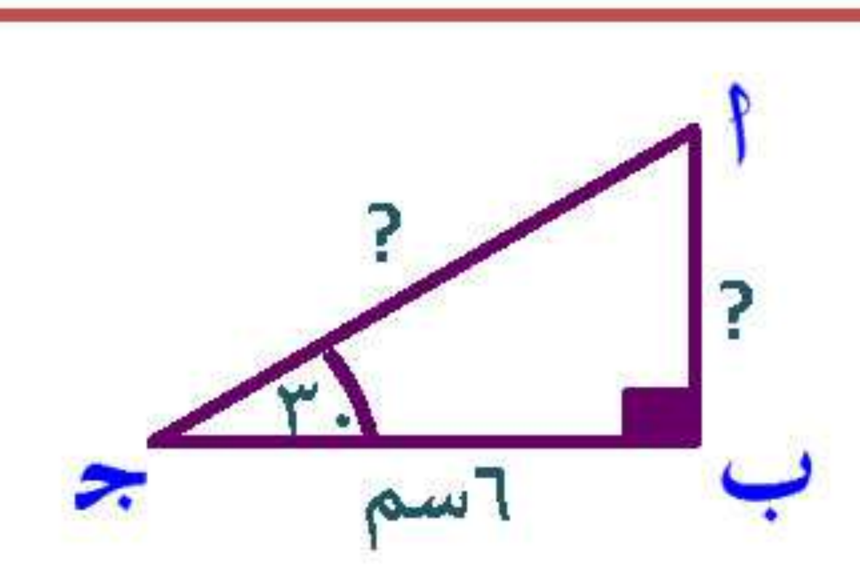
(ا) ظا ع (ب) جا ع (جـ) $\frac{١}{ظا ع}$ (د) جتا ع

٣- جتا س يمكن أن تساوي ....

(ا) $\frac{٧}{٥}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) ١,٣

(٩) في الشكل المرسوم

أوجد طول $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$

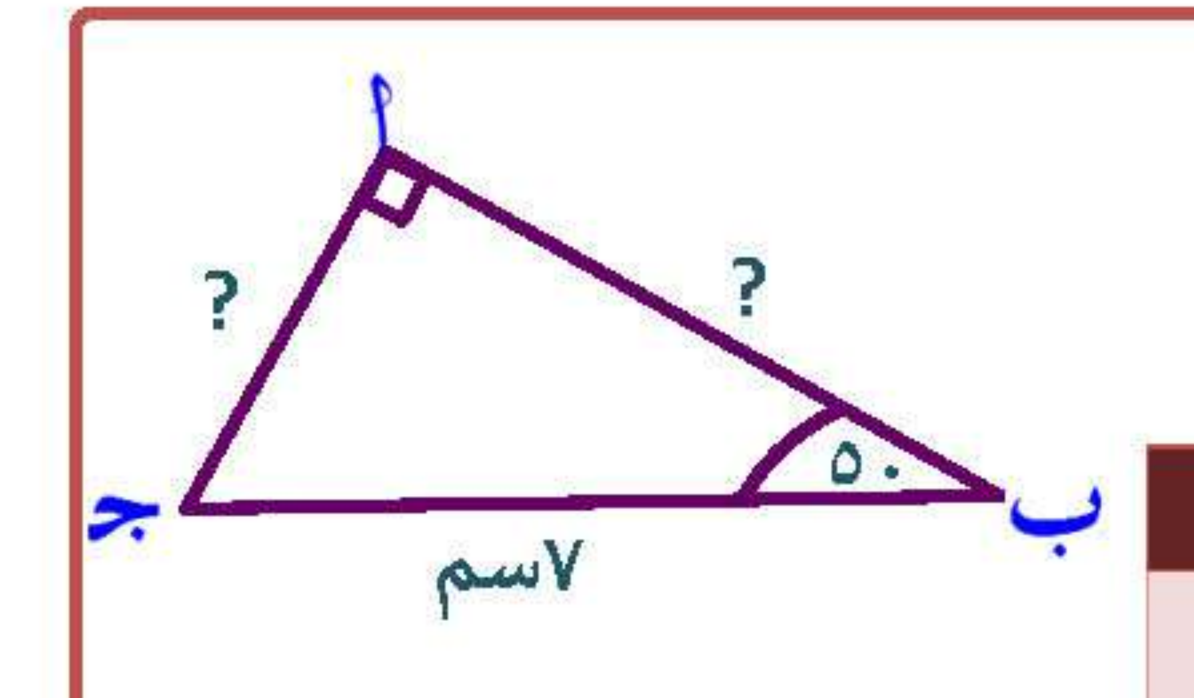


الحل

أب	أجـ
$\frac{\text{أب مقابل}}{\text{ب جـ مجاور}}$ = ظاجـ $\frac{أب}{٦}$ = ظا ٣٠ ∴ أب = ٦ظا ٣٠ أب = ٢ $\sqrt{٣}$ ≃ ٣,٥ سم	من نظرية فيثاغورس أجـ = $\sqrt{(٢\sqrt{٣})^{٢} + ٦^{٢}}$ أجـ = ٦,٩ سم

(٩) في الشكل المرسوم

أوجد طول $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$



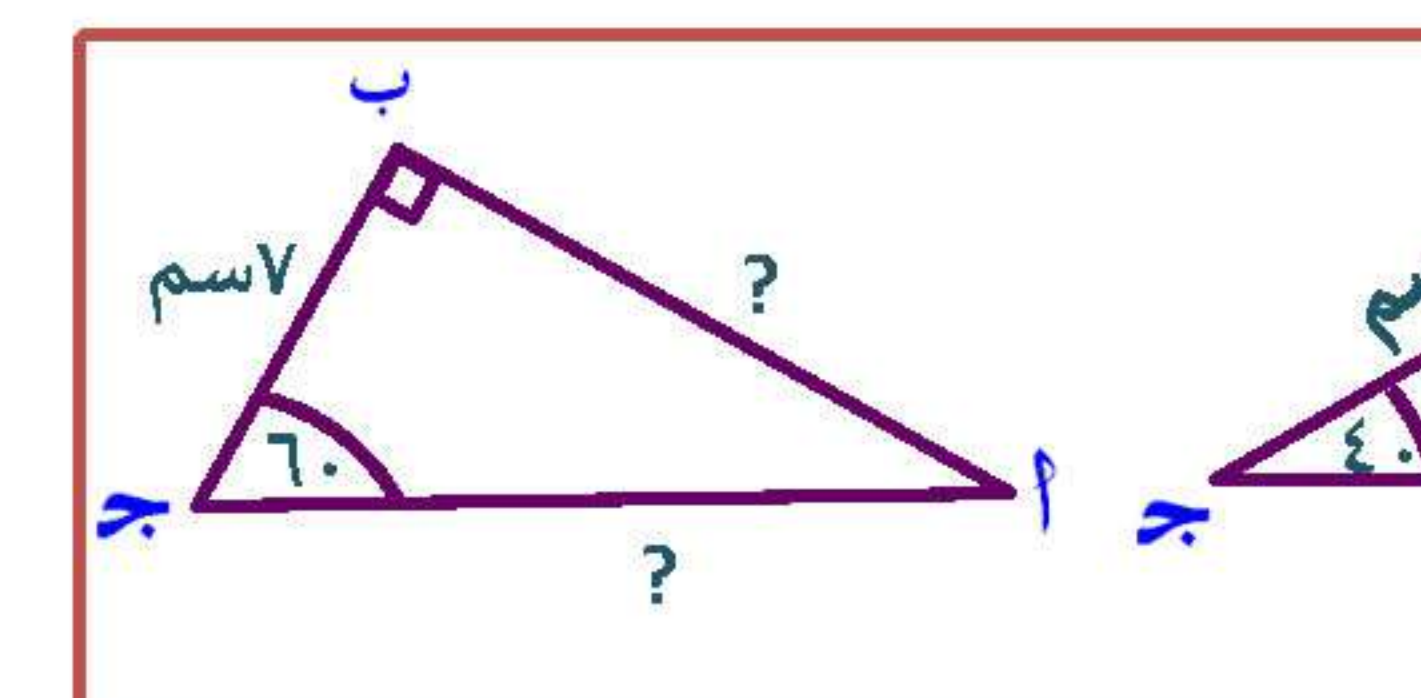
الحل

أب	أجـ
$\frac{أب}{بجـ}$ = جتاب $\frac{أب}{٧}$ = جتا ٥٠ ∴ أب = ٧جتا ٥٠ أب ≃ ٤,٥ سم	من نظرية فيثاغورس أجـ = $\sqrt{٧^{٢} + (٤,٥)^{٢}}$ أجـ = ٥,٤ سم

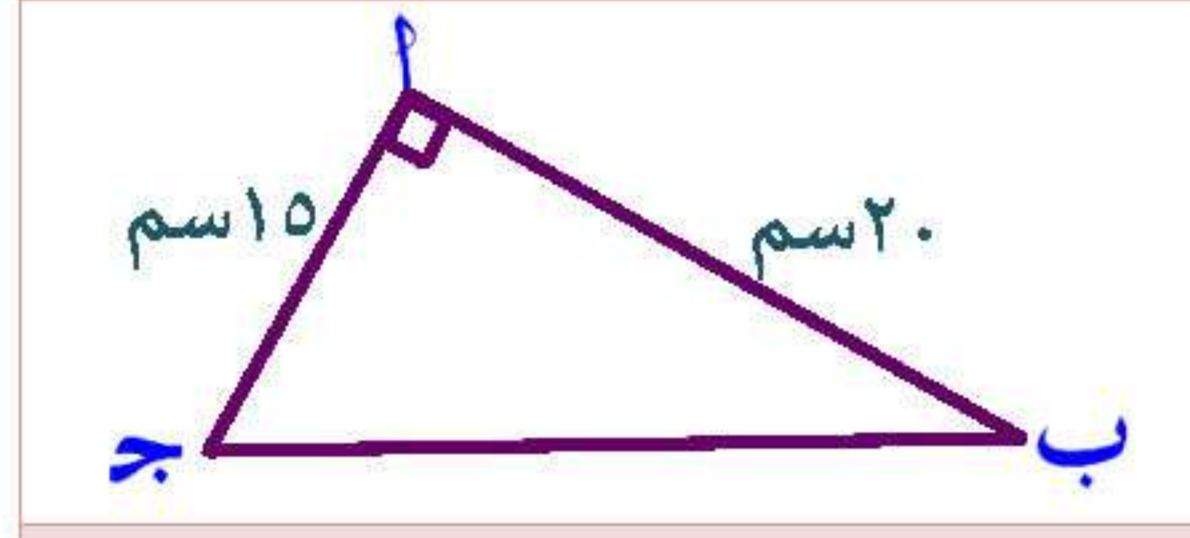
تدريب

في الأشكال التالية

أوجد الاطوال المشار إليها بعلامة ؟



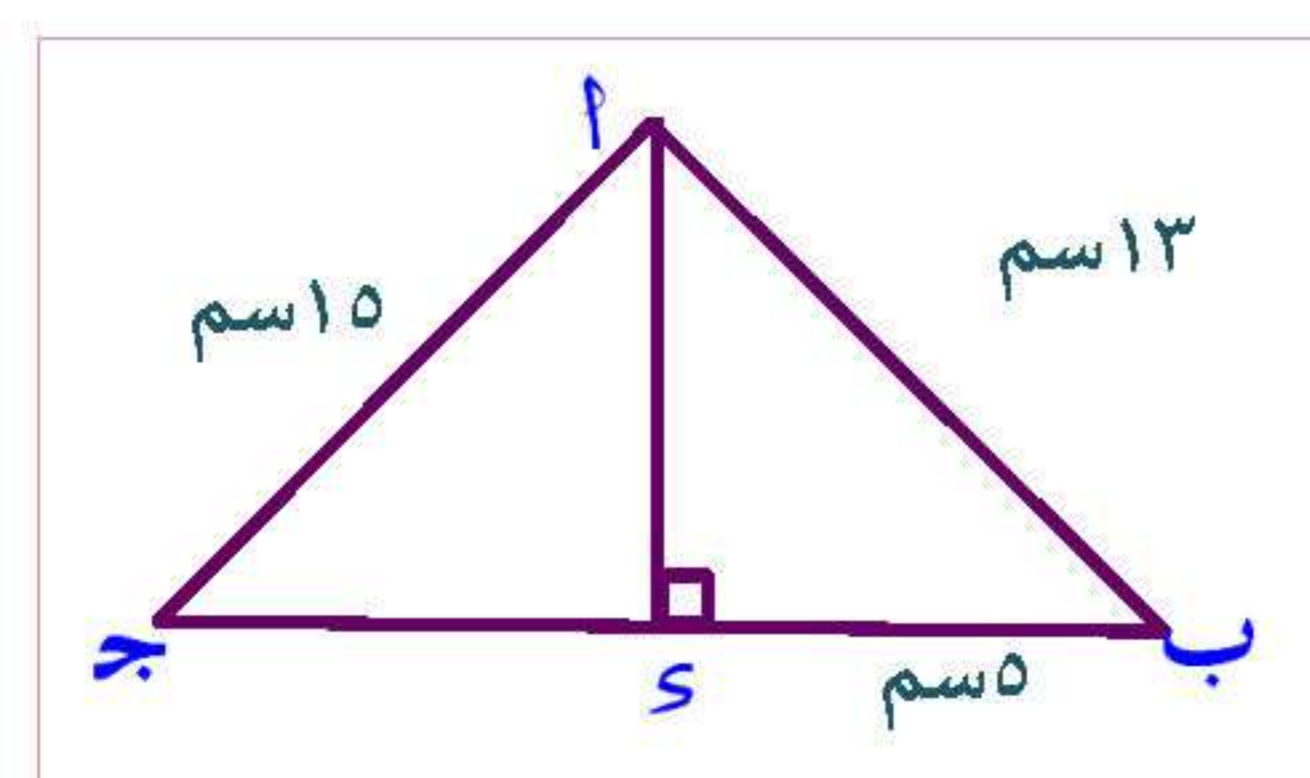
تمـــاريـــن

١	اب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه اب = ٨سم ، اب = ١٥سم أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ
٢	اب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم ١- أوجد النسب المثلثية للزاويتين أ ، جـ ٢- أوجد ق (أ)، ق (جـ)
٣	س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه س ص = ٤ سم ، س ع = ٥ سم ١- أوجد النسب المثلثية للزاويتين س ، ع ٢- أوجد قيمة : جتاس جتاع - جاس جاع
٤	س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع فيه س ص = ٢٥ سم ، ص ع = ٧ سم ١- أوجد قيمة : ظاس × ظاص ٢- أوجد قيمة : جا^{٢}س + جا^{٢}ص
٥	في الشكل المقابل أثبت أن جتاجـ جتاب - جاب جاب = صفر 
٦	في ∆ اب جـ مثلث قائم الزاوية في (ب) إذا كان : ٧ اب = ١٥ اجـ ١- أثبت أن : جتا اجتاجـ - جا اجاجـ = صفر ٢- أوجد قياس زوية جـ
٧	في ∆ س ص ع إذا كان : ق (ع) = ٩٠ ، جتاس = $\frac{٥}{١٣}$ ١- أوجد قيمة : جاس ، ظاص ٢- أوجد قيمة : ق (ص)
٨	في ∆ اب جـ إذا كان : ق (ب) = ٩٠° ، ١٣ جا ا - ١٢ = صفر ١- أوجد قيمة : جتا ا ، ظا ا ٢- أوجد قيمة : ق (جـ)

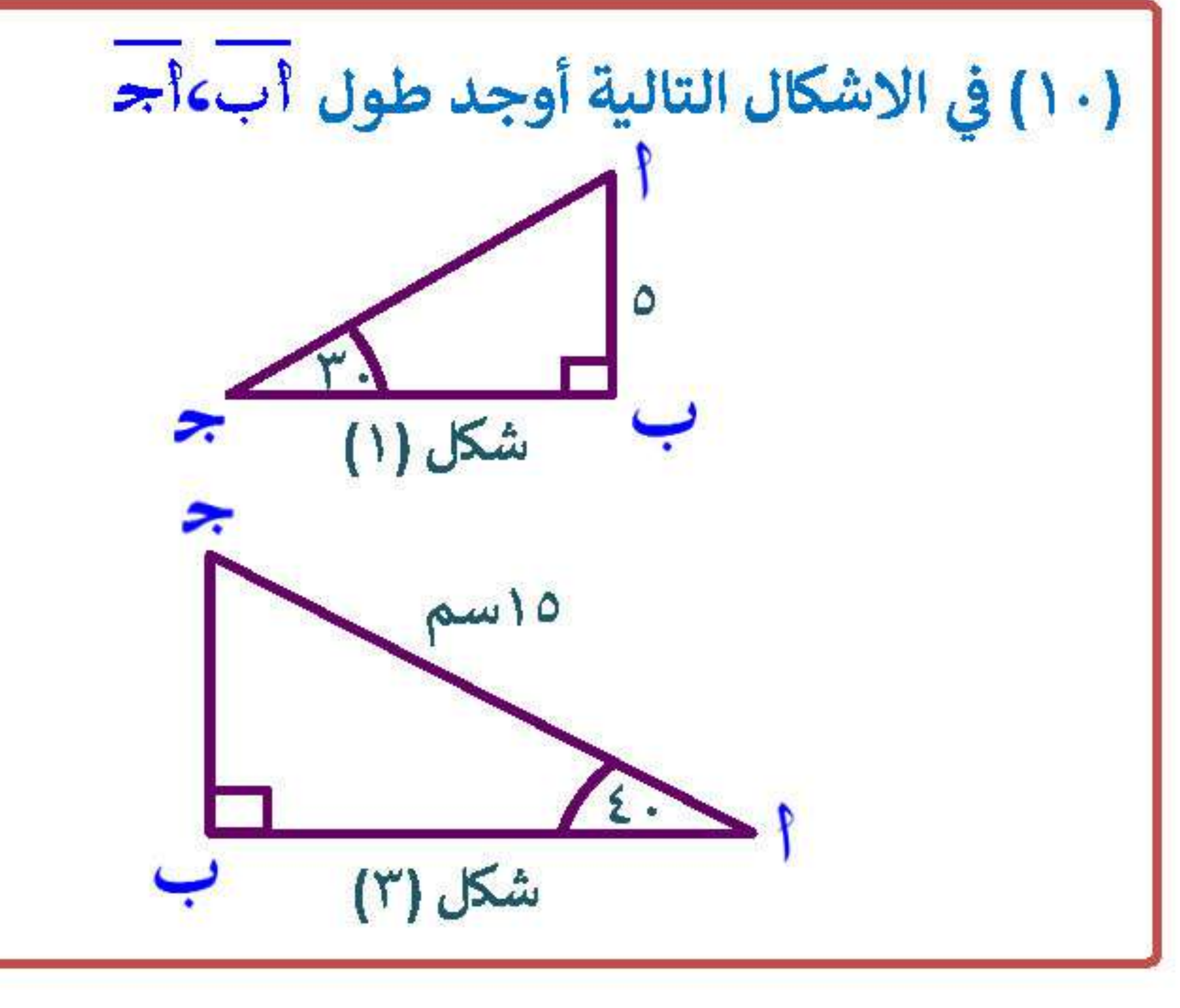
٩ في الشكل المقابل أثبت أن

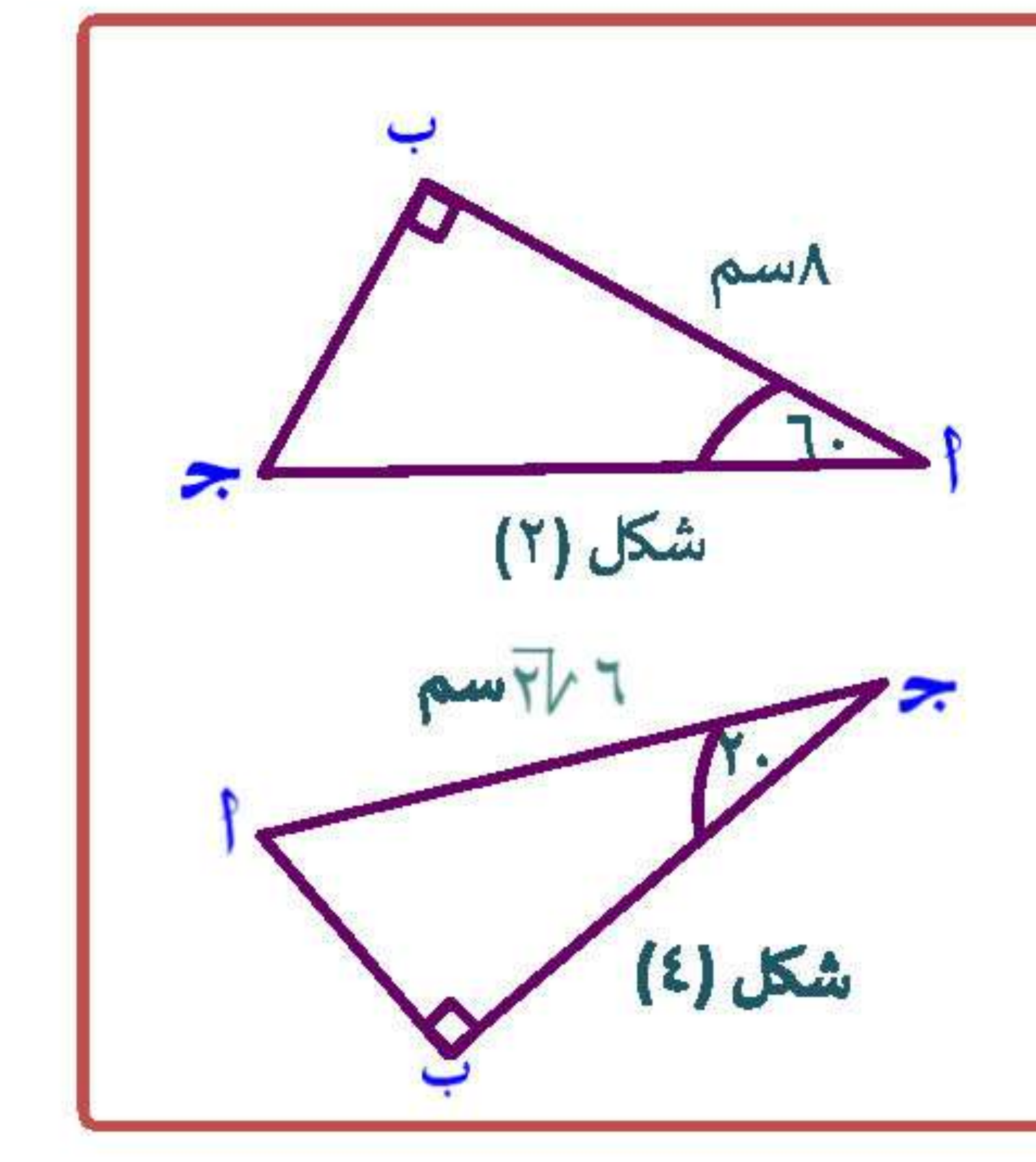
١- ظا(ءجا) جتا(ءجا) $= \frac{١}{٤}$

٢- $\frac{\text{ظا}(ب\hat{ا}ء)\text{ظا}(ءجا)}{\text{ظا}(ج\hat{ا}ء)\text{ظا}(ب\hat{ا}ء)} = \frac{٧}{٢}$



(١٠) في الاشكال التالية أوجد طول $\overline{أب}$، $\overline{أج}$





الدرس الثاني — النسب المثلثية للزوايا الخاصة

الزاوية / النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا sin	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
جتا cos	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٢}}{٢}$
ظا tan	$\frac{\sqrt{٣}}{٣}$	$\sqrt{٣}$	١

ملاحظات

جا٣٠ = جتا٦٠ = $\frac{١}{٢}$

جتا٣٠ = جا٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

جا٤٥ = جتا٤٥ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

جا الزاوية = جتا المتممة

جتا الزاوية = جا المتممة

أولاً بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة ما يلي :

١	جا٣٠ + ظا٤٥ − جتا٦٠ = $\frac{١}{٢} + ١ - \frac{١}{٢} = ١$
٢	٢جتا٣٠ ظا٦٠ − ٢ظا^{٢}٤٥ = $٣\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right) + \left(\sqrt{٣}\right) - ٢(١)^{٢}$ $= \frac{٩}{٢} - ٢ = \frac{٥}{٢} = ٢\frac{١}{٢}$
٣	١٦جا^{٢}٦٠ جتا^{٢}٣٠ + ظا٤٥ = $١٦\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} + ١$ $= ١٦ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٣}{٤} + ١ = ٩ + ١ = ١٠$
٤	(جتا٣٠ − جا٦٠)(جا٣٠ + جتا٦٠) = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\right)$ = صفر × ١ = صفر

تدريب

١- جتا٦٠ جا٦٠ + جا٦٠ جتا٣٠

٢- جا٤٥ جا٤٥ + جا٣٠ جتا٦٠ − جتا^{٢}٣٠

ثانياً أثبت أن :-

١- ٢جتا٢ ٣٠ −ظا ٤٥ =جتا ٦٠

الحل

الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
جتا ٦٠	٢جتا٢ ٣٠ −ظا ٤٥
$= \frac{١}{٢}$ ← ٢	$٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} - ١$
	$= \frac{١}{٢}$ ← ١

من ١ ، ٢ الطرفان متساويان

٢- ١ −ظا٢ ٣٠ = $\frac{٢ظا ٣٠}{ظا ٦٠}$

الحل

الطرف الأيسر	الطرف الأيمن
$\frac{٢ظا ٣٠}{ظا ٦٠}$	١ −ظا٢ ٣٠
$٢\left(\frac{\sqrt{٣}}{٣}\right) \div \sqrt{٣}$	$١ - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$
$\frac{٢\sqrt{٣}}{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{٣}$ ← ٢	$١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$ ← ١

من ١ ، ٢ الطرفان متساويان

تدريب

٣- أثبت أن $\frac{١ - جا ٣٠}{١ + جا ٣٠}$ =ظا٢ ٣٠

ثالثاً أوجد قيمة س فيما يلي :-

١- س جا٠٣ جتا٢ ٤٥ = جتا٢ ٣٠

الحل

$س\left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢$

$\frac{١}{٤}س = \frac{٣}{٤}$ **بالضرب × ٤**

$\therefore س = \frac{٣}{٤} \times ٤ = ٣$

٢- س جا٢ ٤٥ ظا٢ ٤٥ = ظا٢ ٦٠

الحل

$س\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢ (١)^٢ = (\sqrt{٣})^٢$

$\frac{١}{٢}س = ٣$ **بالضرب × ٢**

$\therefore س = ٣ \times ٢ = ٦$

٣- جا س = ٠,٦

الحل

$\text{SH} \sin(0.6) = (,,,) \rightarrow$ س = ١١ ً ٥٢ َ ٣٦ °

٤- ٢ جا س = ظا ٦٠

الحل

$٢جا س = \sqrt{٣} \Leftarrow جا س = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow س = ٦٠°$

٥- جا س = جا٢ ٦٠ − جتا٢ ٤٥ جا ٣٠

الحل

$جا س = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)^٢ \left(\frac{١}{٢}\right)$

$جا س = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤}$

$جا س = \frac{١}{٢} \Leftarrow س = ٣٠$

٦- جا٤س = جتا٥س

الحل

∵ جا = جتا ∴ الزاويتان متتامتان

٤س + ٥س = ٩٠ ⇐ ٩س = ٩٠ ⇐ س = ١٠°

٧- جا(س + ١٥) = $\frac{١}{٢}$ $\quad$ $SH\ \cos\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow 60$

الحل

س + ١٥ = ٦٠ ⇐ س = ٦٠ − ١٥ ⇐ س = ٤٥°

٨- ظا(س − ٢٠) = ١ $\quad$ $SH\ \tan(1) \rightarrow 45$

الحل

س − ٢٠ = ٤٥ ⇐ س = ٤٥ − ٢٠ ⇐ س = ٦٥

٩- جا$\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $\quad$ $SH\ \sin\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow 30$

الحل

$\frac{س}{٢}$ = ٣٠ ⇐ س = ٢ × ٣٠ ⇐ س = ٦٠

١٠- ظا٢س = $\sqrt{٣}$ $\quad$ $SH\ \tan(\sqrt{3}) \rightarrow 60$

الحل

٢س = ٦٠ ⇐ س = ٣٠°

تدريب

أوجد قيمة س

١- جا(س − ٢٠) = $\frac{١}{٢}$

٢- جا٢س = ١



تمـــــــاريـــــــن

(١) بدون الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

١- جا٤٥ − جتا٤٥

٢- ٢جا٣٠ + ٢جتا٦٠

٣- ظا٣٠ ظا٦٠°

٤- جا^{٢} ٣٠ + جتا^{٢} ٣٠

٥- جا٣٠ + جتا٦٠ + ظا٤٥

٦- $\sqrt{٢}$ جا٤٥ + $\sqrt{٢}$ جتا٤٥ + ظا٤٥

٧- ٢جا^{٢} ٤٥ + ٤جا٦٠ جتا٣٠

٨- ١ − ٢جا^{٢} ٣٠

٩- $\frac{١}{٤}$جا^{٢} ٤٥ ظا^{٢} ٦٠ − $\frac{١}{٣}$جا^{٢} ٦٠ ظا^{٢} ٣٠

١٠- ظا^{٢} ٤٥ − جتا^{٢} ٦٠ = جتاس جا^{٢} ٤٥ ظا٦٠

(٢) أثبت أن :

١- جتا٦٠ = ٢جتا^{٢} ٣٠ − ١

٢- ٢جا٣٠ جتا٣٠ = جا٦٠

٣- ٥جتا^{٢} ٦٠ − ظا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٣٠

٤- جا٦٠ جتا٣٠ − جتا٦٠ جا٣٠ = جا^{٢} ٤٥

٥- $\frac{\text{٢ظا٣٠}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠}}$ = ظا٦٠

٦- $\frac{\text{١ − ظا}^{٢}\text{ ٣٠}}{\text{٢ظا}^{٢}\text{ ٣٠}}$ = ظا٣٠

(٣) أوجد قيمة س إذا كان :

١- س جا٣٠ = ٤

٢- س ظا٤٥ = جا٣٠

٣- س جا٣٠ جتا^{٢} ٤٥ = جا^{٢} ٦٠

٤- ٤س = جتا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٣٠ ظا^{٢} ٤٥

٥- جاس = ١ − جتا٦٠

٦- ظاس = ٣ظا^{٢} ٣٠

٧- ٢جاس = ظا^{٢} ٦٠ − ٢ظا٤٥

٨- ظاس = ٤جتا٦٠ جا٣٠

٩- جاس = جا^{٢} ٦٠ − جتا^{٢} ٤٥ جا٣٠

١٠- ظا^{٢} ٤٥ − جتا^{٢} ٦٠ = جتاس جا^{٢} ٤٥ ظا٦٠

١١- جا٣س = جتا٦س

١٢- جاس = جتا(س + ١٠)

١٣- جا(س + ١٠) = جتا(س + ٣٠)

١٤- جاس = ٠,٥

١٥- جا$\frac{\text{س}}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

١٦- جتا٣س = $\frac{١}{٢}$

١٧- جتا(س + ٥) = $\frac{١}{٢}$

١٨- ظا(س + ١٠) = $\sqrt{٣}$

١٩- جتا$\frac{\text{س}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٢٠- ظا(س + ١٥) = ١

٢١- ظا(٢س − ١٠) = $\frac{١}{٢}$

ثانياً : الهندسة التحليلية

الدرس الثالث

البعد بين نقطتين

أ ———— ب

طول اب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ - (ص_٢ - ص_١)^٢}$

البعد = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات − مربع فرق الصادات}}$

الأمثلة

(١) أوجد البعد بين كل نقطتين

١- أ(٣،٥) ، ب(٧،٨) ٢- جـ(−٤،−٣) ، ء(٠،−٥)

٣- س(−١،٢) ، ص(٢،٦) ٤- هـ(٢،−٦) ، و(٠،−٥)

الحل

البعد = $\sqrt{(\text{فرق السينات})^٢ + (\text{فرق الصادات})^٢}$

١- اب = $\sqrt{(٧-٣)^٢ + (٨-٥)^٢} = ٥$ وحدة طول

٢- جـء = $\sqrt{(٠+٤)^٢ + (-٥+٣)^٢} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

٣- س ص = $\sqrt{(٢+١)^٢ + (٦-٢)^٢} = ٥$ وحدة طول

٤- هـو = $\sqrt{(٠-٢)^٢ + (-٥+٦)^٢} = \sqrt{٥}$ وحدة طول

(٢) أثبت أن

أ(١،٤) ، ب(٣،–٢) ، جـ(–٣،١٦) تقع على استقامة واحدة

الحل

فكرة المثال : نوجد ثلاث أبعاد يطلع الكبير بيساوي الاتنين الصغيرين

أب = $\sqrt{(٣-١)^٢+(-٢-٤)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

بجـ = $\sqrt{(-٣-٣)^٢+(١٦+٢)^٢}$ = ٦ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

أجـ = $\sqrt{(-٣-١)^٢+(١٦-٤)^٢}$ = ٤ $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∵ بجـ = أب + أجـ

∴ أ،ب،جـ تقع على استقامة واحدة

(٣) أثبت أن النقط

أ(٣،–١) ، ب(–٤،٦) ، جـ(٢،–٢) تقع على الدائرة التي مركزها م(–١،٢) ثم

أوجد محيط الدائرة حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$

الحل

فكرة المثال : نوجد ثلاث أبعاد م أ،م ب،م جـ يطلعوا متساويين

محيط الدائرة = ٢ π نق   مساحة الدائرة = π نق^٢

م أ = $\sqrt{(-١-٣)^٢+(٢+١)^٢}$ = ٥ وحدة طول

م ب = $\sqrt{(-١-٤)^٢+(٢-٦)^٢}$ = ٥ وحدة طول

م جـ = $\sqrt{(-١-٢)^٢+(٢+٢)^٢}$ = ٥ وحدة طول

∵ م أ = م ب = م جـ

∴ النقط أ،ب،جـ تقع على الدائرة م

∴ نق = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٥ = ٣١,٤٣ وحدة طول

(٤) إذا كان البعد بين النقطتين
أ(ك،٧) ، ب(−٢،٣) هو ٥ وحدات
أوجد ك

الحل

$أب = \sqrt{(ك+٢)^٢ + (٧-٣)^٢} = ٥$ بتربيع الطرفين

$(ك+٢)^٢ + ١٦ = ٢٥$

$(ك+٢)^٢ = ٢٥ - ١٦$

$(ك+٢)^٢ = ٩$ بأخذ الجذر

$(ك+٢) = \pm ٣$

ك+٢ = ٣	ك+٢ = −٣
ك= ٣ − ٢	ك= −٣ − ٢
ك= ١	ك= −٥

(٥) إذا كان البعد بين النقطتين
أ(٥،١) ، ب(ك،−١) وكان أب = $٢\sqrt{٢}$
وحدة أوجد قيمة ك

الحل

$أب = \sqrt{(ك-٥)^٢ + (١+١)^٢} = ٢\sqrt{٢}$

بتربيع الطرفين

$(ك-٥)^٢ + ٤ = ٨$

$(ك-٥)^٢ = ٤$ بأخذ الجذر

$ك-٥ = \pm ٢$

ك−٥ = ٢	ك−٥ = −٢
ك= ٧	ك= ٣

تدريب

(١) أوجد البعد بين كل نقطتين
١- أ(٣،٤) ، ب(٦،٨)
٢- جـ(−٢،٣) ، د(٤،١١)
(٢) أثبت أن النقط
أ(١،٤) ، ب(٣،−٢) ، جـ(−٣،١٦) تقع
على استقامة واحدة
(٣) إذا كان البعد بين النقطتين
أ(ك،٤) ، ب(٥،٢) وكان أب = ٥ وحدات
أوجد ك

ملاحظة

(١) مساحة المربع = الضلع × نفسه
= $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره
(٢) مساحة المستطيل = الطول × العرض
(٣) مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ ضرب القطرين
(٤) مساحة المثلث $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع
(٥) مساحة الدائرة = $\pi نق^٢$
(٦) محيط الدائرة = $٢\pi نق$
(٧) محيط أي مضلع = مجموع أطوال أضلاعه
(٨) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

(٦) أثبت أن النقط ا(٢،٣) ، ب(−١،−١) ، جـ(٣،−٤) ، ء(٦،٠) هي رؤوس مربع وأوجد مساحته

الحل

الفكرة : نثبت أن ١- جميع الاضلاع متساوية
٢- القطران متساويان

اب $= \sqrt{(٢+١)^٢ + (٣+١)^٢} = ٥$ وحدة طول

ب جـ $= \sqrt{(٣+١)^٢ + (−٤+١)^٢} = ٥$ وحدة طول

جـ ء $= \sqrt{(٦-٣)^٢ + (٠+٤)^٢} = ٥$ وحدة طول

ا ء $= \sqrt{(٦-٢)^٢ + (٠-٣)^٢} = ٥$ وحدة طول

∴ جميع الأضلاع متساوية في الطول ← ١

ا جـ $= \sqrt{(٣-٢)^٢ + (−٤-٣)^٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

ب ء $= \sqrt{(٦+١)^٢ + (٠+١)^٢} = ٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ القطران متساويان ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ الشكل مربع

∵ مساحة المربع = طول الضلع × نفسه ٥×٥ = ٢٥ وحدة مربعة

تدريب

أثبت أن الرؤوس ا(−١،١) ، ب(−٦،−٣) ، جـ(−١٠،٢) ، ء(−٥،٦) هي رؤوس مربع ثم أوجد مساحة سطحه

(٧) أثبت أن النقط أ(٥،١) ، ب(١،٥) ، جـ(−١،٣) ، ء(٣،−١) هي رؤوس مستطيل وأوجد مساحته

الحل

الفكرة : نثبت أن ١- كل ضلعان متقابلان متساويان
٢- القطران متساويان

أب = $\sqrt{(٥-١)^٢+(١-٥)^٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(١+١)^٢+(٥-٣)^٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

جـء = $\sqrt{(٣+١)^٢+(٣+١)^٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ وحدة طول

أء = $\sqrt{(٥-٣)^٢+(١+١)^٢}$ = ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ كل ضلعان متقابلان متساويان ← ١

أجـ = $\sqrt{(٥+١)^٢+(١-٣)^٢}$ = ٢$\sqrt{١٠}$ وحدة طول

ب ء = $\sqrt{(١-٣)^٢+(٥+١)^٢}$ = ٢$\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ القطران متساويان في الطول ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ الشكل مستطيل

مساحة المستطيل = أجـ × ب جـ = ٤$\sqrt{٢}$ × ٢$\sqrt{٢}$ = ١٦ وحدة مربعة

تدريب

أثبت أن النقط أ(٠،١) ، ب(٤،٥) ، جـ(١،٨) ، ء(−٣،٤) هي رؤوس مستطيل ثم أوجد مساحة سطحه



(٨) أثبت أن النقط ا(٣،٣) ، ب(٥،٩) ، جـ(−١،٧) ، د(−٣،١) هي رؤوس معين وأوجد مساحته

الحل

الفكرة : ١- جميع الأضلاع متساوية

٢- القطران غير متساويان

اب = $\sqrt{(٥-٣)^{٢}+(٩-٣)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

بجـ = $\sqrt{(٥+١)^{٢}+(٩-٧)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

جـد = $\sqrt{(-٣+١)^{٢}+(١-٧)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

اد = $\sqrt{(-٣-٣)^{٢}+(١-٣)^{٢}} = ٢\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∴ كل الأضلاع متساوية ← ١

اجـ = $\sqrt{(-١-٣)^{٢}+(٧-٣)^{٢}} =$ وحدة طول

بد = $\sqrt{(١-٣)^{٢}+(٥+١)^{٢}} =$ وحدة طول

∴ القطران غير متساويان ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ الشكل ابجد معين

مساحة المربع = اجـ×بجـ = $٤\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢} = ١٦$ وحدة مربعة

تدريب

ا(٥،٢) ، ب(٢،−٢) ، جـ(−١،٢) ، د(٢،٦) أثبت أن ابجد معين وأوجد مساحته

ملاحظة

نوع المثلث من حيث
١- أضلاعه :
متساوي الأضلاع – متساوي الساقين – مختلف الأضلاع
(٢) زواياه :
قائم الزاوية – منفرج الزاوية – حاد الزوايا
لتحديد نوع $\triangle$ ا ب جـ من حيث زواياه وليكن اجـ أكبر ضلع
* $\triangle$ قائم إذا كان (اجـ)^2 = (اب)^2 + (ب جـ)^2
* $\triangle$ منفرج إذا كان (اجـ)^2 > (اب)^2 + (ب جـ)^2
* $\triangle$ حاد الزوايا إذا كان (اجـ)^2 < (اب)^2 + (ب جـ)^2

(٩) هل $\triangle$ الذي رؤوسه ا(١،-٢) ، ب(-٤،٢) ، جـ(١،٦) متساوي الساقين أم متساوي الأضلاع

الحل

الفكرة: نوجد أبعاده الثلاثة

اب = $\sqrt{(-٤-١)^2 + (٢+٢)^2}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(١+٤)^2 + (٦-٢)^2}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول

اجـ = $\sqrt{(١-١)^2 + (٦+٢)^2}$ = ٨ وحدة طول

اب = ب جـ $\neq$ اجـ

$\therefore$ ا ب جـ متساوي الساقين

تدريب

أثبت أن ا(-٢،٤) ، ب(٣،-١) ، جـ(٤،٥) رؤوس $\triangle$ متساوي الساقين

(١٠) أثبت أن النقط أ(٣،١٠) ، ب(٨،٥) ، جـ(٥،٢) هي رؤوس Δ قائم الزوية ثم أوجد مساحة سطحه

الحل

الفكرة : نوجد الثلاث أبعاد ونقارن مربع أكبر ضلع مع مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

أب = $\sqrt{(٨-٣)^٢ + (٥-١٠)^٢}$ = ٥ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

ب جـ = $\sqrt{(٥-٨)^٢ + (٢-٥)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

أجـ = $\sqrt{(٥-٣)^٢ + (٢-١٠)^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

* ملاحظة : Δ مختلف الاضلاع

$(أجـ)^٢$	$(أب)^٢ + (ب جـ)^٢$
$= (٢\sqrt{١٧})^٢$ = ٦٨ ← ١	$= (٥\sqrt{٢})^٢ + (٣\sqrt{٢})^٢$ = ٦٨ ← ٢

من ١ ، ٢ $\because$ $(أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$

$\therefore$ Δ أب جـ قائم الزاوية في ب

مساحة Δ أب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أب × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٥ $\sqrt{٢}$ × ٣ $\sqrt{٢}$ = ١٥ وحدة مربعة

تدريب

أثبت أن النقط أ(١،٤) ، ب(٤،٨) ، جـ(٥،١) رؤوس Δ قائم وأوجد مساحته

تمـــــــاريـــــــن

(١)	أوجد طول $\overline{أب}$ في كل مما يأتي :		
١	أ(٣،٢) ، ب(٦،٨)	٢	أ(٣،-١) ، ب(-١،ك) أب = ٥ وحدة طول
٢	أ(٠،٠) ، ب(-٣،-٤)		
٣	أ(٥،-١) ، ب(١،٤)	٣	أ(٢،ك) ، ب(٣،-١) أب = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول
٤	أ(-٦،٠) ، ب(-٤،٠)		
(٢)	اثبت أن أ،ب،جـ تقع على استقامة واحد في كلاً من :	(٥)	أثبت أن الشكل أبجد مربع وأوجد مساحة سطحه في كلاً من :
١	أ(٥،٣) ، ب(٣،٢) ، جـ(١،١)	١	أ(٢،٤) ، ب(-٣،٠) جـ(-١،٧) ، د(-٣،١)
٢	أ(٠،٣) ، ب(-١،٢) ، جـ(-٢،١)		
٣	أ(٣،-٢) ، ب(-٢،٣) ، جـ(٨،-٧)	٢	أ(٣،٣) ، ب(٥،٩) جـ(-١،٧) ، د(-٣،١)
(٣)	أثبت أن النقط أ(١،٢) ، ب(٣،٢) ، جـ(١،-٤) تقع على الدائرة التي مركزها م(٢،-١) وأوجد مساحتها	(٦)	أثبت أن الشكل أبجد معين وأوجد مساحة سطحه:
(٤)	أوجد قيمة ك في كلاً من :-	١	أ(٥،٢) ، ب(٢،-٢) جـ(-١،٢) ، د(٢،٦)
١	أ(ك،-٢) ، ب(٧،١) أب = ٥ وحدات وحدة طول	٢	أ(٢،١) ، ب(٤،٥) جـ(٠،٣) ، د(-٢،-٢)
		٣	أ(-١،٢) ، ب(٤،-٣) جـ(-٣،-٤) ، د(-٨،١)

(٧)	**اثبت أن اب جء مستطيل وأوجد مساحته**
١	أ(٠، ١) ، ب(٤، ٥) ج(١، ٨) ، ء(-٣، ٤)
٢	أ(-١، ٣) ، ب(٥، ١) ج(٦، ٤) ، ء(٠، ٦)
(٨)	**أثبت أن الشكل اب جء متوازي أضلاع في كلاً من :**
١	أ(١، ٢) ، ب(٢، ٥) ج(٥، ٧) ، ء(٤، ٤)
٢	أ(١، ٢) ، ب(٥، ٧) ج(٨، -٣) ، ء(٤، -٨)
(٩)	**اثبت أن Δ اب ج متساوي الساقين في كلاً من :**
١	أ(٢، ٥) ، ب(٠، ٤) ، ج(٣، ٣)
٢	أ(١، ٣) ، ب(٠، ١) ، ج(-١، ٤)
٣	أ(٢، -٤) ، ب(-٤، -٥) ، ج(-٣، ١)
(١٠)	**حدد نوع Δ اب ج بالنسبة لأضلاعه**
١	أ(٢، ٥) ، ب(-١، ١) ، ج(-٤، ٥)
٢	أ(٢، ٥) ، ب(-٤، -٣) ، ج(-١٠، ٥)
٣	أ(١، ٢) ، ب(-٣، -٢) ، ج(-٤، ٣)

(١١)	**اثبت أن Δ اب ج مستطيل وأوجد مساحة سطحه**
١	أ(١، ٤) ، ب(-١، -٢) ، ج(٢، -٣)
٢	أ(-٢، ٤) ، ب(-٥، -٣) ، ج(٠، ٢)
٣	أ(١، ٤) ، ب(٤، ٨) ، ج(٥، ١)
(١٢)	**إذا كان أ(-١، -١) ، ب(٣، -١) أثبت أن ج(١، -٤) تقع على محور $\overline{\text{أب}}$**
(١٣)	**إذا كان يمر بنقطة م(٦، ٣) ج(٣، ١) ، ء(-٣، ٧) أثبت أن تقع على محور م**
(١٤)	**الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، -٤) أوجد طول نصف قطرها ومحيط الدائرة**
(١٥)	**اب جء مربع وكان أ(٢، ٣) ، ج(-٢، ٧) أوجد طول $\overline{\text{بء}}$**
(١٦)	**اب جء مربع فيه ب(٢، -٤) ، ج(-٢، -٨) أوجد مساحة سطحه**

الدرس الرابع إحداثي نقطة المنتصف

أ ——//—— جـ ——//—— ب

منتصف

* احداثي نقطة منتصف $\overline{أب}$ = ($\frac{مجموع\ السينات}{٢}$ ، $\frac{مجموع\ الصادات}{٢}$)

$$جـ = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$$

* جـ المنتصف = $\frac{أ + ب}{٢}$ ⇐ أ الطرف = ٢جـ − ب

ب الطرف = ٢جـ − أ

* احداثي احدى نقطتي الطرف = ٢ × نقطة المنتصف − نقطة الطرف الأخرى

(١) إذا كان أ(٢،٥) ، ب(٤،١)، جـ(٦،−١) أوجد احداثي نقطة منتصف كلاً من $\overline{أب}$، $\overline{بجـ}$، $\overline{أجـ}$

الحل

إحداثي نقطة المنتصف = ($\frac{مجموع\ السينات}{٢}$ ، $\frac{مجموع\ الصادات}{٢}$)

إحداثي منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٢+٤}{٢} ، \frac{٥+١}{٢}\right)$ = (٣،٣)

إحداثي منتصف $\overline{بجـ}$ = $\left(\frac{٤+٦}{٢} ، \frac{١-١}{٢}\right)$ = (٥،٠)

إحداثي منتصف $\overline{أجـ}$ = $\left(\frac{٢+٦}{٢} ، \frac{٥-١}{٢}\right)$ = (٤،٢)

(٢) إذا كان جـ(−١،٠) منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٣،٤) أوجد احداثي نقطة ب

الحل

$$\text{جـ} = \left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2}\right)$$

$$(-1،0) = \left(\frac{3+\text{س}_2}{2} ، \frac{4+\text{ص}_2}{2}\right)$$

$\frac{3+\text{س}_2}{2} = -1$	$\frac{4+\text{ص}_2}{2} = 0$
$3+\text{س}_2 = -2$	$4+\text{ص}_2 = 0$
$\text{س}_2 = -2-3$	$\text{ص}_2 = 0-4$
	$\text{ص}_2 = -4$

$\text{س}_2 = -5$

∴ ب = (−٥، −٤)

حل آخر

*** نقطة الطرف = ٢ × المنتصف − الطرف المعلوم**

ب = ٢جـ − أ

ب = ٢(−١،٠) − (٣،٤) = (−٢،٠) − (٣،٤) = (−٥،−٤)

ب = (−٢،٠) − (٣،٤) = (−٥،−٤)

(٣) دائرة مركزها م(٣،٧) ، $\overline{\text{أب}}$ قطر فيها حيث أ(٤،−١) أوجد احداثي ب

الحل

∵ م منتصف $\overline{\text{أب}}$

∴ ب = ٢م − أ

ب = ٢(٣،٧) − (٤،−١)

ب = (٦،١٤) − (٤،−١) = (٢،١٥)

(٤) إذا كان أ(١،٣) ، ب(–٣،٥) ، جـ(–٢،٧) ، د(٢،٤) أثبت أن أبجد متوازي أضلاع

الحل

منتصف القطر $\overline{أجـ}$ = $\left(\frac{١-٢}{٢}،\frac{٣+٧}{٢}\right) = \left(-\frac{١}{٢}،\frac{٩}{٢}\right)$

منتصف القطر $\overline{بد}$ = $\left(\frac{-٣+٢}{٢}،\frac{٥+٤}{٢}\right) = \left(-\frac{١}{٢}،\frac{٩}{٢}\right)$

∵ منتصف القطر $\overline{أجـ}$ = منتصف القطر $\overline{بد}$

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

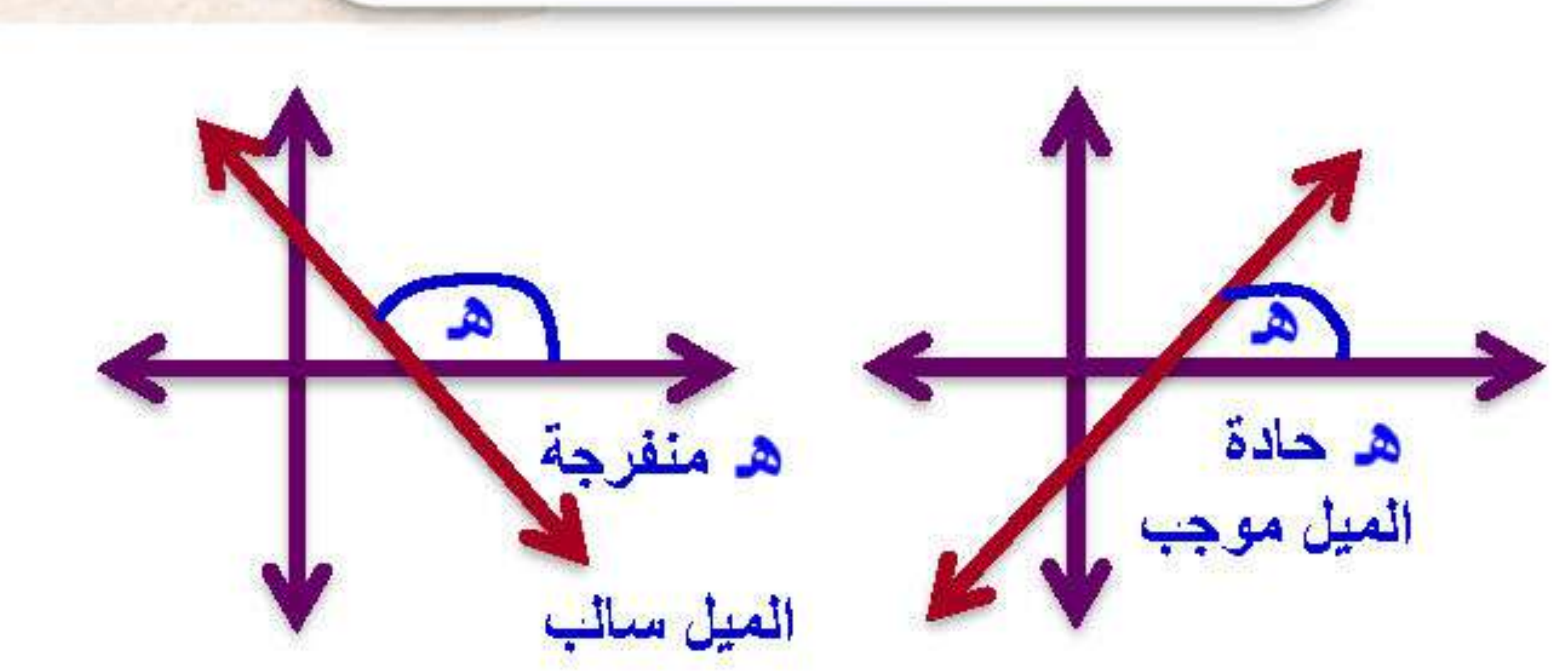
∴ الشكل أبجد متوازي أضلاع

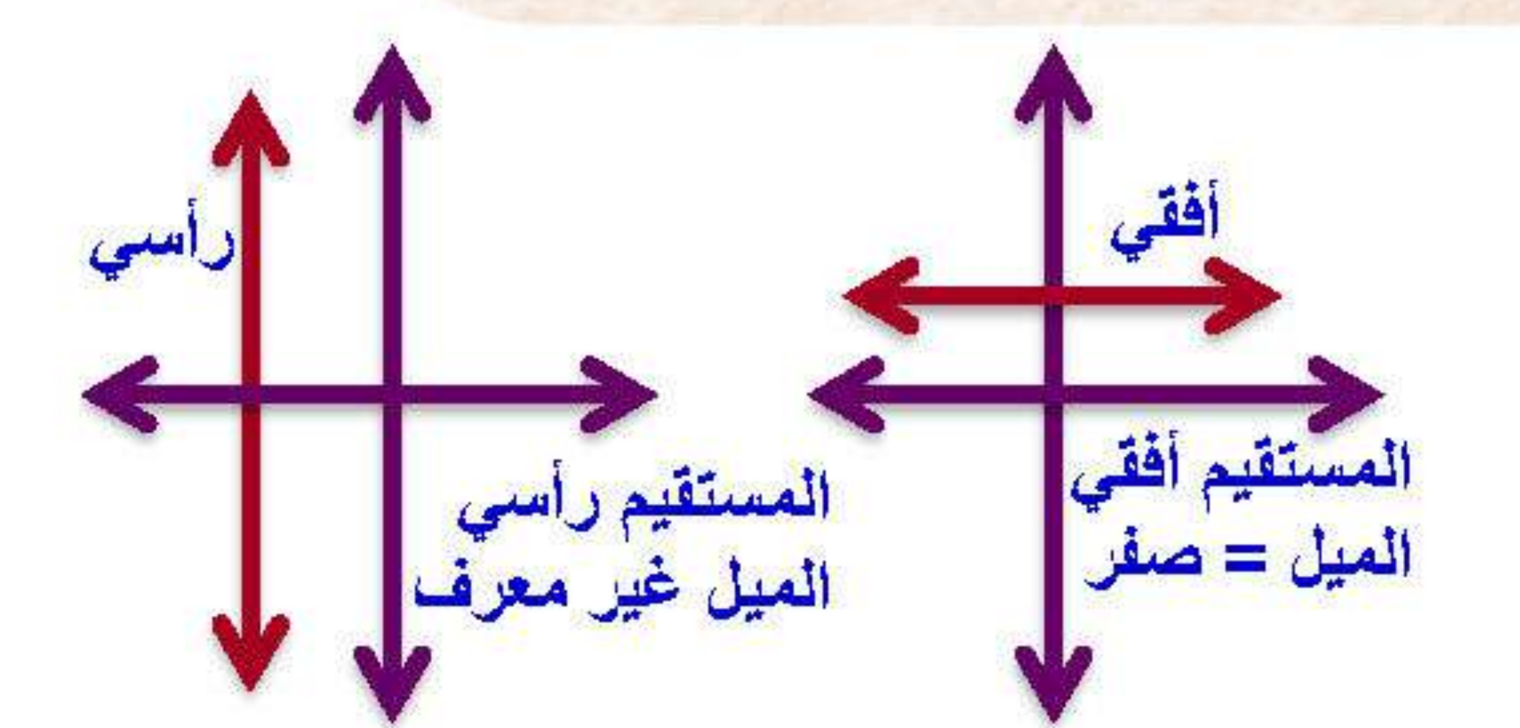
تمــــــاريــــــن

(١)	أوجد منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(٥،٢) ، ب(–١،٢)
(٢)	$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م حيث أ(٣،٧) ، ب(١،٣) أوجد احداثي م
(٣)	$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م حيث م(٤،٥) ، أ(١،–٢) أوجد احداثي ب
(٤)	$\overline{أب}$ قطر في الدائرة جـ حيث جـ(٥،٠) ، ب(٣،١) أوجد احداثي أ
(٥)	أبجد متوازي أضلاع فيه أ(٥،–١) ، جـ(–٩،–٣) أوجد نقطة تقاطع القطرين
(٦)	أبجد معين ونقطة تقاطع قطريه م(٥،–٢) وكان ب(٢،٤) أوجد أحداثي النقطة د
(٧)	إذا كان أ(–٢،٤) ، ب(٥،–٣) ، جـ(٧،٤) ، د(٠،١ ١) أثبت أن أبجد متوازي أضلاع
(٨)	أبجد متوازي أضلاع فيه أ(٠،٥) ، ب(–١،١) ، جـ(٤،٢) أوجد احداثي نقطة تقاطع القطرين واحداثي الرأس د

الدرس الخامس

ميل الخط المستقيم





حالات إيجاد ميل الخط المستقيم

	الحالة المعطاة	الميل
١	من نقطتين $(س_١ ، ص_١)$ ، $(س_٢ ، ص_٢)$	$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$
٢	من زاوية قياسها هـ يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	م = ظا هـ
٣	من معادلة المستقيم ص = أ س + جـ	م = أ معامل س جـ = الجزء المقطوع من محور الصادات
٤	من معادلة المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠	$م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ $م = \frac{-أ}{ب}$

(١) أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين

١	أ(٣،٠) ، ب(٥،٤)
٢	أ(٠،٧) ، ب(-٢،-٥)
٣	أ(٣،٢) ، ب(٣،٧)

الحل

$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

١	$م = \frac{٤ - ٠}{٥ - ٣} = ٢$
٢	$م = \frac{-٥ - ٧}{-٢ - ٠} = ٦$
٣	$م = \frac{٧ - ٢}{٣ - ٣} = \frac{٥}{٠}$ غير معرف

(٢) أوجد ميل المستقيم الذي يصنع زوية قياسها هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات حيث

هـ = ٣٠° ، هـ = ٦٠° ، هـ = ١٢٠°

الحل

م = ظا هـ

*	$م = ظا ٣٠ = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$
*	$م = ظا ٦٠ = \sqrt{٣}$
*	$م = ظا ١٢٠ = -\sqrt{٣}$

(٣) أوجد ميل المستقيمات التالية

١	ص = ٧س + ٥
٢	$ص = \frac{١}{٢}س$
٣	ص = ٣ − س
٤	٢ص = ٦س − ٤

الحل

م = معامل س

١	ص = ٧س + ٥ م = ٧ ، جـ = ٥
٢	$ص = \frac{١}{٢}س$ $م = \frac{١}{٢}$ ، جـ = ٠
٣	ص = ٣ − س م = −١ ، جـ = ٣
٤	٢ص = ٦س − ٤ ÷ ٢ ص = ٣س − ٢ م = ٣ ، جـ = −٢

(٤) أوجد ميل المستقيمات التالية

١	٣س + ٥ص = ٧
٢	٤س − ٢ص + ١ = ٠
٣	٢ص − س + ٢ = ٠
٤	٣ص = ٥ − س
٥	٢ص + ٣ = ٠
٦	٧س − ٢ = ٠

الحل		تدريبات	
م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$		**أكمل ما يأتي :-**	**(٥)**
٣س + ٥ص = ٧ م = $\frac{-٣}{٥}$	١	ميل المستقيم المار بالنقطتين (٥، ١) ، (٦ ، ٢) هو	١
٤س − ٢ص + ١ = ٠ م = $\frac{-٤}{-٢}$ ⟸ م = ٢	٢	ميل المستقيم المار بالنقطتين (٣، -٢) ، (٤ ، ٠) هو	٢
٢ص − س + ٢ = ٠ م = $\frac{١}{٢}$	٣	ميل المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٧) ، (٣ ، ٧) هو	٣
٢ص = ٥ − س س + ٢ص = ٥ م = $\frac{-١}{٣}$	٤	ميل المستقيم الذي يصنعها قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	٤
٢ص + ٣ = ٠ م = **صفر** **لاحظ معامل س = ٠**	٥	ميل المستقيم الذي يصنعها قياسها ١٥٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	٥
٧س − ٢ = ٠ م = $\frac{-٧}{٠}$ م **غير معرف** **لاحظ معامل ص = ٠**	٦	ميل المستقيم ص = ٣س + ٥ هو .... والجزء المقطوع من محور الصادات هو .... وحدة طول	٦
		ميل المستقيم ص = ٢س − ٦ هو .... والجزء المقطوع من محور الصادات هو .... وحدة طول	٧
		ميل المستقيم ٢ص = ١٠س − ١٤ هو .... والجزء المقطوع من محور الصادات هو .... وحدة طول	٨
		ميل المستقيم ٢س + ص + ١ = ٠ هو	٩
تدريبات		ميل المستقيم ٢س + ٣ص = ٠ هو	١٠
		ميل المستقيم ٢ص − ٧س + ٥ = ٠ هو	١١

شرط التوازي وشرط التعامد لمستقيمين

(١) ل١ // ل٢ إذا كان

م١ = م٢ والعكس

(٢) ل١ ⊥ ل٢ إذا كان

$م_1 \times م_2 = -1$ والعكس

(١) اثبت أن المستقيمان

ل١ : ٦س − ٣ص + ١ = ٠

ل٢ : ص = ٢س + ١

متوازيان

الحل

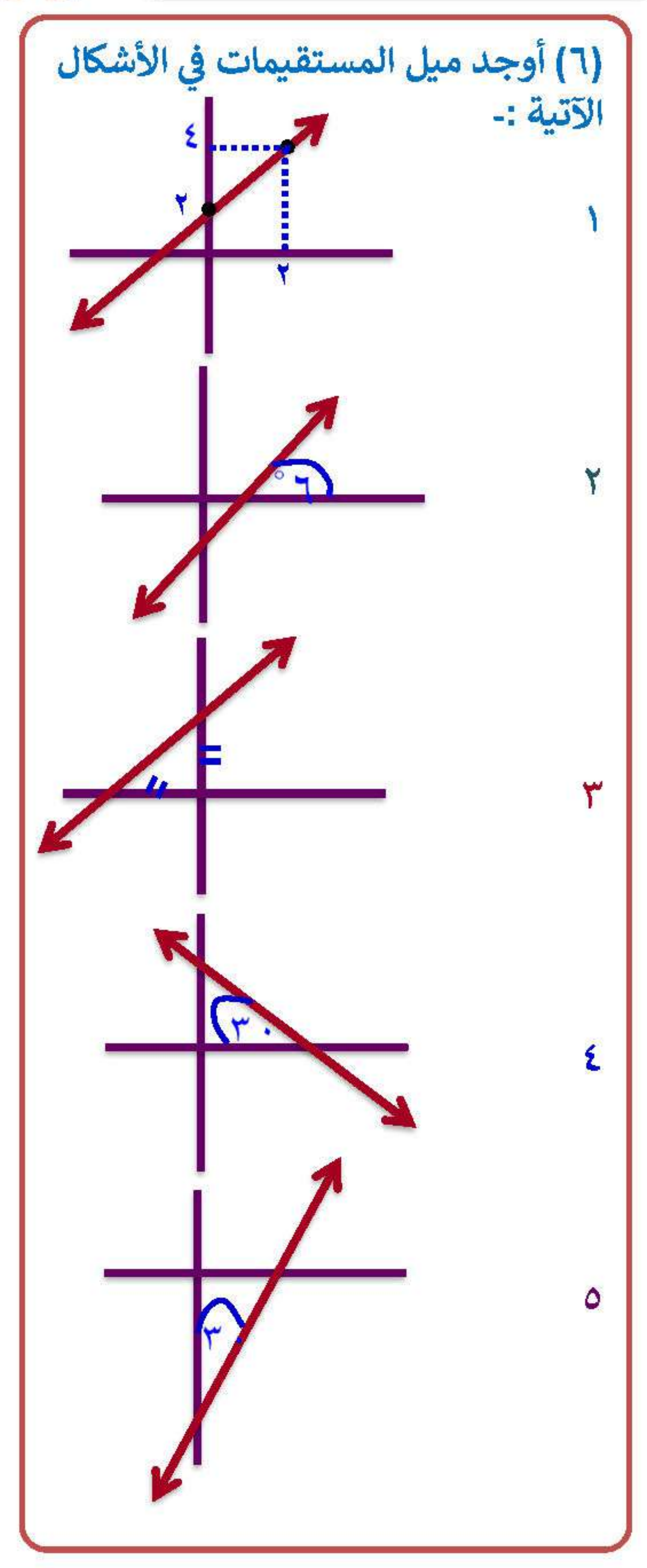
$م_1 = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-6}{-3} = 2$

$م_2 =$ معامل س = ٢

$\because م_1 = م_2$

$\therefore$ ل١ // ل٢

(٦) أوجد ميل المستقيمات في الأشكال الآتية :-



(٢) اثبت أن المستقيمان

ل١ : ٣س – ص + ٢ = ٠

ل٢ : س + ٣ص + ٧ = ٠

متعامدان

الحل

$م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-١} = ٣$

$م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٣} = ٣$

$\because م_١ \times م_٢ = ٣ \times \frac{-١}{٣} = -١$ الشرط

$\therefore ل_١ \perp ل_٢$

(٤) أوجد قيمة ك التي تجعل المستقيمان

ل١ : ٥س + ك ص = ٤

ل٢ : ٢س + ٦ص = ٧

متوازيان

الحل

$م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٥}{ك}$

$م_٢ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٢}{٦} = \frac{-١}{٣}$

$\because ل_١ \parallel ل_٢$

$\therefore م_١ = م_٢$

$\frac{-٥}{ك} = \frac{-١}{٣}$

$ك = \frac{-٥ \times ٣}{-١} = ١٥$

(٤) أوجد قيمة هـ التي تجعل المستقيمان

ل١ : ٤س – ٥ص + ١ = ٠

ل٢ : هـ س + ٨ص = ٠

متعامدان

الحل

$م_١ = \frac{-٤}{-٥} = \frac{٤}{٥}$

$م_٢ = \frac{-هـ}{٨}$

$\because ل_١ \perp ل_٢ \Leftarrow م_١ = م_١ \times م_٢ = -١$ ويكون $\Leftarrow$

$م_١ = \frac{-١}{م_٢}$

$\frac{٤}{٥} = \frac{٨}{هـ}$

$هـ = \frac{٥ \times ٨}{٤} = ١٠$

(٥) أثبت أن النقط أ(–١، –٣) ،

ب(٠، –٢) ، جـ(٣، ١)

تقع على استقامة واحدة

الحل

$م_١ \overline{أب} = \frac{-٢ + ٣}{٠ + ١} = ١$

$م_٢ \overline{بجـ} = \frac{١ + ٢}{٣ - ٠} = ١$

$\because م_١ = م_٢$

$\therefore \overline{أب} \parallel \overline{بجـ}$

$\because$ ب نقطة مشتركة

$\therefore$ أ،ب،جـ تقع على إستقامة واحدة

(٦) أوجد قيمة س التي تجعل النقط
أ(−١، ٢) ، ب(٢، س) ، ج(٤، −٣)
على استقامة واحدة

الحل

ميل $\overline{أب} = \frac{-٢+٣}{٢+١} = \frac{س-٢}{٣}$

ميل $\overline{أج} = \frac{-٣-٢}{٤+١} = -١$

∵ أ، ب، ج على إستقامة واحدة

∴ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{أج}$

$\frac{س-٢}{٣} = -١$

$س - ٢ = -٣$

$س = -٣ + ٢ = -١$

(٧) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين
(٢، $\sqrt{٣}$) ، (٣، ٢$\sqrt{٣}$) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$م_١ = \frac{٢\sqrt{٣} - \sqrt{٣}}{٣-٢} = \sqrt{٣}$

$م_٢ =$ ظا ٦٠ $= \sqrt{٣}$

∵ $م_١ = م_٢$

∴ المستقيمان متوازيان

(٧) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين
(١، ٤) ، (٣، ٦) يوازي المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

ميل المستقيم وميل الموازي له وميل العمودي عليه

ميل المستقيم	ميل الموازي له	ميل العمودي عليه
$\frac{٧}{٢}$	$\frac{٧}{٢}$	$\frac{-٢}{٧}$
-٢	-٢	$\frac{١}{٢}$
$\frac{-١}{٣}$		
٥		
$\sqrt{٣}$		
١		
-١		
صفر		



تمارين

(١) أوجد ميل كلاً مما يأتي

أ (-١، ٤)، (٣، ٢) هو ....

ب (-١، -٤)، (٨، -٤) هو ....

جـ (٣، ١)، نقطة الأصل هو ....

(٢) ميل المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زوية قياسها

أ ٣٠° هو ....

ب ٦٠° هو ....

جـ ٤٥° هو ....

ء ١٣٥ هو ....

هـ ٥″ ١٢′ ٧٤° هو ....

(٣) أوجد ميل كلاً مما يأتي

أ ٣س + ص = ٧ هو ....

ب ٤س − ص − ٢ = ٠ هو ....

جـ س + ص = ٠ هو ....

ء ص = س − ٤ هو ....

هـ ص = ٧ − س هو ....

و ٢ص = ٥س − ٢ هو ....

(٤) ميل المستقيم الأفقي ....

(٥) ميل المستقيم الرأسي ....

(٦) ميل محور السينات ....

(٧) ميل محور الصادات ....

(٨) ميل العمودي على محور السينات ....

(٩) ميل العمودي على محور الصادات ....

(١٠) حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين ....

(١١) حاصل ضرب ميلي قطري المربع ....

(١٢) ميلي ضلعين متقابلين في المستطيل ....

(١٣) أ ب جـ ء مربع فيه أ(٣، ٢) ، ب(٠، ٣)

فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ = ... ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = ...

(١٤) إذا كان $\frac{٣}{٢}$، $\frac{ك}{٦}$ ميلا مستقيمين متوازيين

فإن ك = ...

(١٥) إذا كان $\frac{-٣}{٢}$، $\frac{٣}{أ}$ ميلا مستقيمين متوازيين

فإن أ = ...

(١٦) إذا كان $\frac{ك}{٤}$، $\frac{٤}{٣}$ هو ميلا مستقيمين متعامدين فإن ك = ...

(١٧) المستقيم ٣س + ص = ٤ ميله .... يمر بالنقطة (١ ، ....)

(١٨) المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢

١- ميله = ...

٢- ميل الموازي له = ...

٣- ميل العمودي عليه = ...

٤- الجزء المقطوع من محور الصادات ....

ومن محور السينات ......

٥- مساحة المثلث المصنوع من تقاطع المستقيم بالمحورين هي ....

٦- محيط المثلث المصنوع من تقاطع المستقيم بالمحورين هو ....

٧- المستقيم يصنع زاوية قياسها .... مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

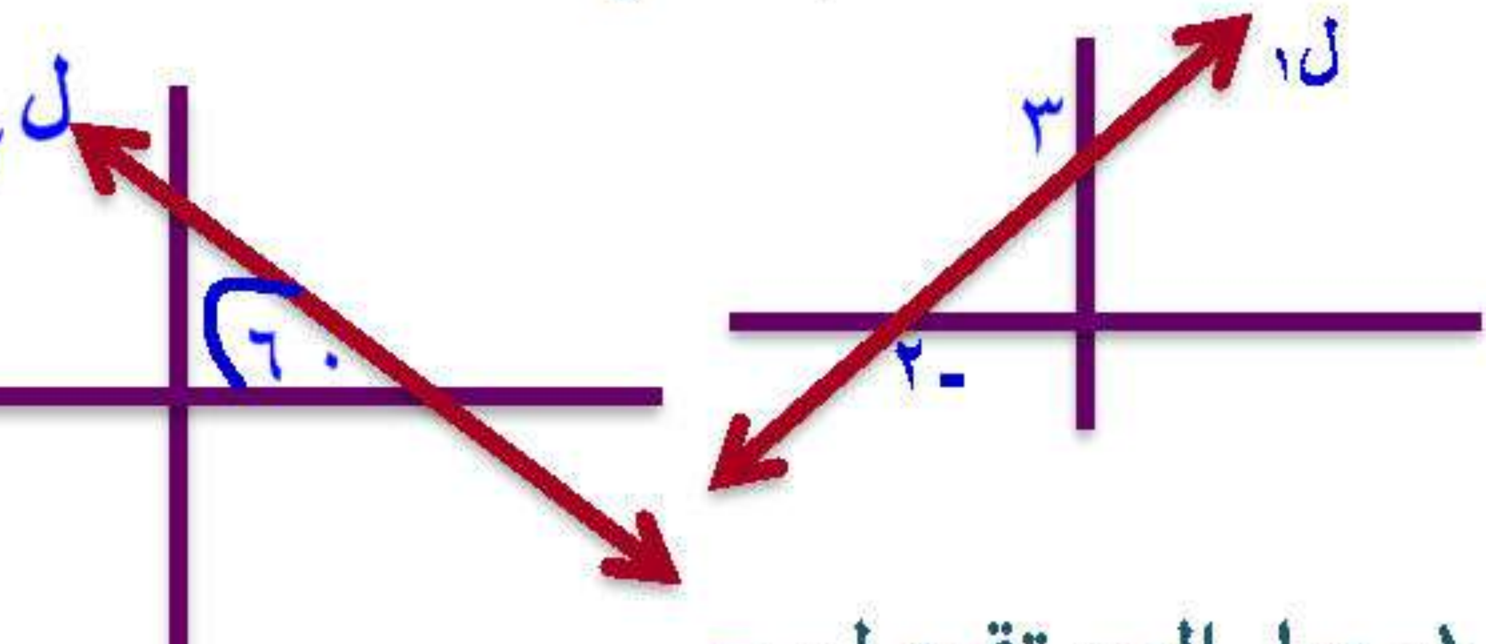
(١٩) ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١}{٣}$ ، $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$ فإن

ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ...

(٢٠) ميل $\overleftrightarrow{أب} = -٢$ ، $\overleftrightarrow{أب} // \overleftrightarrow{جـ د}$ فإن

ميل $\overleftrightarrow{جـ د}$ = ...

(٢١) ميل المستقيم الأفقي ....



١- ميل المستقيم ل١ = ...

٢- ميل المستقيم ل٢ = ...

(٢٢) إذا كان ل١ // ل٢

ل١ : ك س + ٢ص = ٧

ل٢ : ٢س + ص – ١ = ٠

أوجد قيمة ك

(٢٣) أوجد قيمة أ التي تجعل المستقيمان متعامدان

ل١ : ٢س – ص + ٥ = ٠

ل٢ : أس + ص = ٠

أوجد قيمة أ

(٢٤) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، -٢) ، (س ، ٤) هو ٣ أوجد س

(٢٥) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، -٣) ، (٣ ، س) هو -٢ أوجد س

(٢٦) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤، ٣$\sqrt{٣}$) ، (٥، ٢$\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

(٢٧) أثبت

أ(-١،-١) ، ب(٢،٣) ، جـ(٦،٠) رؤوس مثلث قائم في ب

الدرس السادس معادلة الخط المستقيم

* معادلة الخط المستقيم
بمعلومية ميله م والجزء المقطوع من محور الصادات جـ

$$ص = م س + جـ$$

* م نحصل عليه بالطريقة المعروفة ، جـ = ص − م س

(١) أوجد معادلة المستقيم الذي
١- ميله = ٥ ويقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٣ وحدات
٢- ميله = $-\frac{١}{٢}$ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٦ وحدات

الحل

١- ∵ م = ٥ ، جـ = ٣ ∴ المعادلة : ص = ٥س + ٣

٢- ∵ م = $-\frac{١}{٢}$ ، جـ = ٦ ∴ المعادلة : ص = $\frac{-١}{٢}$س − ٦

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٥ ، ١) ، (٦ ، ٤) ويقطع معه الجزء الموجب لمحور الصادات وحدتين

الحل

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

١- م = ٣ ، جـ = ٢

$$م = \frac{٤ - ١}{٦ - ٥} = ٣$$

٢- ∴ المعادلة : ص = ٣س + ٢

(٣) أوجد معادلة المستقيم الذي

أ ميله ٧ ويمر بالنقطة (٣ ، ٤)

ب ميله $-\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة (٠ ، -١)

الحل

أ – (٣ ، ٤)

م	ج = ص − م س
٧	$\text{ج} = ٤ - ٣(٧)$ $\text{ج} = -١٧$

∴ المعادلة : $\text{ص} = ٧\text{س} - ١٧$

ب – (٠ ، -١)

م	ج = ص − م س
$\frac{-١}{٢}$	$\text{ج} = -١ - \frac{-١}{٢} \times \text{صفر}$ $\text{ج} = -١$

∴ المعادلة : $\text{ص} = \frac{-١}{٢}\text{س} - ١$

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين

(٤ ، -١) ، (-١ ، -٢)

الحل

(٤ ، -١)

م	ج = ص − م س
$\text{م} = \frac{-٢ + ١}{-١ - ٤}$ $\text{م} = \frac{١}{٥}$	$-١ - \frac{١}{٥} \times ٤$ $= \frac{-٩}{٥}$

∴ المعادلة : $\text{ص} = \frac{١}{٥}\text{س} - \frac{٩}{٥}$

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٧) ويصنع زوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

(٣ ، ٧)

م	ج = ص − م س
$\text{م} = \text{ظا } ٤٥ = ١$	$\text{ج} = ٧ - ١ \times ٣$ $\text{ج} = ٤$

∴ المعادلة : $\text{ص} = \text{س} + ٤$

(٦) أوجد معادلة المستقيم الذي ميله -٣ ويقطع من محور السينات جزء قدرة -٦

الحل

(-٦ ، ٠)

م	ج = ص − م س
-٣	$= ٠ - (-٣)(-٦)$ $= -١٨$

∴ المعادلة : $\text{ص} = -٣\text{س} - ١٨$

تدريبات

أوجد معادلة المستقيم :-

١- الذي ميله ٤ ويمر بالنقطة (٣ ، ٢)

٢- الذي ميله -١ ويمر بالنقطة (٣، -٥)

٣- المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٤ ، ٠)

٤- المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٧ ، ٢)

(٧) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، -٤) ويوازي المستقيم س – ٢ص + ١ = ٠

الحل

(٢ ، -٤)

ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

$= \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١}{٢}$ لأنهما متوازيان

م	جـ = ص – م س
$\frac{١}{٢}$	$جـ = -٤ - \frac{١}{٢} \times ٢$ $جـ = -٣$

∴ المعادلة : $ص = \frac{١}{٢}س - ٣$

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٤ ، ٢) وعمودي على المستقيم $ص = \frac{١}{٢}س + ٣$

الحل

(-٤ ، ٢)

ميل المستقيم المعلوم = $\frac{١}{٢}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = – ٢ لأنهما متعامدان

م	جـ = ص – م س
-٢	$جـ = ٢ - (-٢ \times -٤)$ $جـ = -٦$

∴ المعادلة : $ص = -٢س - ٦$

(٩) أوجد معادلة معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ(٣،٥) ، ب(٥،٧)

الفكرة

* نوجد احداثي منتصف $\overline{أب}$
* نوجد ميل $\overline{أب}$ وهو ميل العمودي على محور التماثل المطلوب معادلته

الحل

منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{٣+٥}{٢}،\frac{٥+٧}{٢}\right) = (٤،٦)$

ميل $\overline{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧-٥}{٥-٣} = ١$

∴ ميل المحور = – ١ لأنهما متعامدان

م	جـ = ص – م س
-١	$جـ = ٦ - (-١) \times ٤$ $جـ = ١٠$

∴ المعادلة : $ص = -س + ١٠$

تدريب

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، -٢) ويوازي المستقيم ص = ٥س – ١

ملاحظات

(١) معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل و (٠ ، ٠) هي ص = م س
(٢) معادلة محور السينات ص = صفر
(٣) معادلة محور الصادات س = صفر
(٤) معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (أ،ب) هي ص = ب
(٥) معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (أ،ب) هي س = أ
(٦) معادلة المستقيم عند معلومية الأجزاء المقطوعة من المحورين
$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ حيث أ الجزء المقطوع من السينات ، ب الجزء المقطوع من الصادات

(١) أكمل ما يأتي

١- معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = ٥ هي ....

٢- معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل وميله = $\frac{١}{٢}$ هي ....

٣- معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، ٥) ويوازي محور السينات هي ....

٤- معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، -٦) ويوازي محور الصادات هي ....

٥- معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين السيني والصادي على الترتيب جزئين مقطوعين مقدارهما ٦ ، ٤ هي ....

٦- المستقيم الذي معادلته ص = ٧ يوازي محور ....

٧- المستقيم الذي معادلته ٢س = ٥ يوازي محور ....

تـــمـــاريـــــن

(١) في كل مما يأتي أوجد معادلة المستقيم الذي

١- يمر بالنقطة (٣ ، ٢) وميله $\frac{١}{٢}$

٢- يمر بالنقطة (-١ ، ٤) وميله ٥

٣- يمر بالنقطة (-١ ، -٣) وميله − ٢

٤- يمر بالنقطة (٣ ، ١) ويصنع زوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٥- يمر بالنقطة (٠ ، -٢) ويصنع زوية قياسها ١٣٥ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٦- يمر بالنقطتين (٥ ، ١) ، (٤ ، ٠)

٧- يمر بالنقطتين (-٣ ، -١) ، (-٤ ، -٥)

٨- يمر بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٤)

٩- يمر بالنقطة (٥ ، ١) موازياً للمستقيم ٣س + ص = ٤

١٠- يمر بالنقطة (٠ ، ٧) موازياً للمستقيم ص = ٢س + ٥

١١- يمر بالنقطة (٣ ، ١) موازياً للمستقيم ٢ص = ٦س + ٤

١٢- يمر بالنقطة (٢ ، ١) وعمودياً على المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$س + ٣

١٣- يمر بالنقطة (٣ ، -٢) وعمودياً على المستقيم ٥س + ص = ٧

١٤- يمر بالنقطة (٥ ، ٤) وعمودياً على المستقيم ٣س − ص + ١ = ٠

١٥- يمر بالنقطة (٣ ، -١) ويوازي المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٠) ، (٣ ، ٢)

١٦- يمر بالنقطة (٠ ، ٤) وعمودي على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، -١)

١٧- يمر بالنقطة (٣ ، ١) ويوازي محور السينات

١٨- يمر بالنقطة (٥ ، -١) ويوازي محور الصادات

١٩- يمر بالنقطة الأصل وميله = ٤

٢٠- أوجد معادلة محور تماثل $\overline{أب}$ حيث أ(٥،١) ، ب(٣، −٣)